

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 2

14 października 2010 r.

M 2.1. 1 punkt Przedyskutować uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji f , podanej wzorem

$$(a) \quad f(x) = 1/(x^2 + c), \quad \text{gdzie } c \text{ jest stałą;}$$

$$(b) \quad f(x) = (1 - \cos x)/x \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

M 2.2. 1 punkt Załóżmy, że liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ leżą w przedziale $[-2^{-t}, 2^{-t}]$. Uzasadnić, że zachodzi równość

$$(1) \quad \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i) = 1 + \sigma_n,$$

gdzie $\sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + O(2^{-2t})$.

M 2.3. 1 punkt Załóżmy, że liczba naturalna n spełnia nierówność $n < 2 \cdot 2^t$. Udowodnić, że wówczas wielkość σ_n z równości (1) spełnia oszacowanie $|\sigma_n| \leq \omega_n$, gdzie ω_n definiujemy wzorem

$$(2) \quad \omega_n := \frac{n2^{-t}}{1 - \frac{1}{2}n2^{-t}}.$$

M 2.4. 2 punkty Udowodnić, że przy założeniu $n < (0.1) \cdot 2^t$ wielkość (2) spełnia nierówność

$$\omega_n \leq n \left(1.06 \cdot 2^{-t} \right).$$

Stąd wywnioskować, że wielkość σ_n z równości (1) spełnia przybliżoną nierówność

$$\sigma_n \lesssim n2^{-t}.$$

M 2.5. 1 punkt Pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej $u + iv = \sqrt{x + iy}$ obliczamy według wzorów

$$u := \left(\frac{r+x}{2} \right)^{1/2}, \quad v := \left(\frac{r-x}{2} \right)^{1/2}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wskazać, kiedy może w tych obliczeniach wystąpić utrata cyfr znaczących i zaproponować sposób jej uniknięcia.

M 2.6. 1 punkt Załóżmy, że sumę $s = \sum_{i=1}^n x_i$, gdzie $n = 2^k$, obliczamy stosując *strategię dziel i zwyciężaj*, diskutowaną w zadaniu **P.1.1** z pierwszej listy pracownianej. Wykazać, że ten algorytm jest numerycznie poprawny i — dla dużych wartości n — dokładniejszy niż zwykły algorytm sumowania.

M 2.7. 1 punkt Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania iloczynu skalarnego

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{k=1}^n a_k b_k \neq 0$$

wektorów $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T \in \mathbf{R}^n$.