

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 1

7 października 2010 r.

M 1.1. 1 punkt Niech $B \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Wykazać, że każda liczba $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbf{Z}$, a $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

M 1.2. 1 punkt Niech będą dane: $t \in \mathbf{N}$ oraz $x = sm2^c$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbf{Z}$ i $m \in [\frac{1}{2}, 1)$ o rozwinięciu

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k} 2^{-k},$$

w którym $e_{-k} \in \{0, 1\}$ ($k \geq 1$). Wykazać, że istnieją takie stałe $e_{-k}^* \in \{0, 1\}$ ($1 \leq k \leq t$; $e_{-1}^* = 1$) i $c_t \in \mathbf{Z}$, że zachodzi równość

$$\text{rd}(x) = sm_t 2^{c_t},$$

gdzie $m_t := \sum_{k=1}^t e_{-k}^* 2^{-k}$.

M 1.3. 1 punkt Wykazać, że dla $x = sm2^c \neq 0$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbf{Z}$ i $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, zachodzi nierówność

$$|\text{rd}(x) - x| \leq \frac{1}{2} 2^{-t} 2^c.$$

M 1.4. 1 punkt Wykazać, że dla $x \neq 0$ zachodzi nierówność $\left| \frac{\text{rd}(x) - x}{x} \right| \leq 2^{-t}$.

M 1.5. 1 punkt Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości funkcji (a) $1/(\sqrt{x^2 + 1} + x)$; (b) $\cos^2 x - 1$.

M 1.6. 1 punkt Układ równań liniowych

$$31.69x + 14.31y = 45.00, \quad 13.11x + 5.89y = 19.00$$

ma rozwiązanie dokładne $x = 7.2$ i $y = -12.8$. Wyjaśnić, dlaczego wynik obliczeń w czterocyfrowej arytmetyce dziesiętnej, według wzoru

$$y = \left| \begin{array}{cc} 31.69 & 45.00 \\ 13.11 & 19.00 \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.89 \end{array} \right|$$

znacznie różni się od dokładnego.

M 1.7. 2 punkty Pole n -kąta foremnego ($n \geq 4$) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi $P_n = \frac{1}{2}n \sin \frac{2\pi}{n}$. Wartość P_n jest przybliżeniem liczby π – tym lepszym, im większe jest n . Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno $P_4, P_8, P_{16}, \dots$:

$$s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;$$
$$s_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1} s_k \quad (k = 3, 4, \dots).$$

a) Uzasadnić powyższy algorytm.

b) Stosując wybraną arytmetykę t -cyfrową obliczyć P_{2^k} dla $k = 2, 3, \dots, 2t$.

c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

Stanisław Lewanowicz