

*Definicja 1.* Wartości własne  $\lambda$  macierzy  $A$  to rozwiązania równania  $\det(\lambda I - A) = 0$ .

*Twierdzenie 1.* (Gershgorin) Macierz z przekątną dominującą kolumnowo jest nieosobliwa. Podałem bez dowodu.

*Twierdzenie 2.* (Faddiejewa) Metoda iteracyjna  $x = Bx + c$  jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy promień spektralny  $B$  jest mniejszy od jedności. Podałem bez dowodu.

*Twierdzenie 3.* (treść zadania) Metoda Jacobiego jest zbieżna dla macierzy  $D + L + U$  z przekątną dominującą kolumnowo.

*Dowód.* Popatrzmy na wartości własne macierzy  $B = -D^{-1}(L + U)$ :

$$\det(\lambda I - B) = 0$$

$$\det(\lambda I + D^{-1}(L + U)) = 0$$

$$\det(\lambda D^{-1}D + D^{-1}(L + U)) = 0$$

$$\det(\lambda D^{-1}D + D^{-1}(L + U)) = 0$$

$$\det(D^{-1}(\lambda D + L + U)) = 0$$

$$\det(D^{-1})\det(\lambda D + L + U) = 0$$

Zauważmy, że skoro  $D^{-1}$  ma odwrotność  $D$  to nie może być osobliwa, czyli  $\det(D^{-1}) \neq 0$ .

$$\det(\lambda D + L + U) = 0$$

$D + L + U$  jest nieosobliwa, gdyż jest dominująca kolumnowo. Tylko dla  $\lambda < 1$  może być, że  $\lambda D + L + U$  nie jest dominująca kolumnowo, więc wszystkie wartości własne  $\lambda$  są mniejsze od jedności. Zbieżność z tw. Faddiejewej.  $\square$