Egzamin z analizy numerycznej (M) 2010.

5 lutego 2010

Zadanie 1. Niech $\{P_k\}$ oznacza ciąg wielomianów ortogonalnych w przedziale $[0, 1]$, z wagą $p(x) = 1$. Wykaż, że dla każdego $n = 1, 2, ...$ wszystkie zera wielomianu P_n są rzeczywiste, pojedyncze i leżą w przedziale $(0, 1)$.

Zadanie 2. Niech $C_p[a, b]$ oznacza przestrzeń funkcji f, dla których istnieje $\int_a^b p(x)f^2(x)dx$, gdzie p jest funkcją wagową. Niech w_n^* będzie n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f \in C_p[a, b]$ w sensie normy średniokwadratowej w tej przestrzeni. Udowodnić, że dla każdego $u_n \in \Pi_n$ zachodzi:

$$< f - w_n^*, u_n >= 0$$

gdzie $< f, g >= \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$

Zadanie 3. Niech w_n^* będzie n-tym wielomianem optymalnym dla $f \in C[a, b]$ w sensie normy jednostajnej tej przestrzeni. Wykaż, że w_n^* interpoluje funkcję f w $n + 1$ punktach z przedziału $[a, b]$.

Zadanie 4. Sprawdź (bez odwoływania się do wyrażenia dla błędu), że wzór Simpsona jest dokładny dla wszystkich wielomianów stopnia trzeciego.

Zadanie 5. $I(f) = \int_{-c}^{c} p(x)f(x)dx$ gdzie p jest parzystą funkcją wagową. Wykazać, że węzły i współczynniki kwadratury Gaussa

$$G_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

stosowanej do obliczenia całki $I(f)$ są takie, że

$$x_k = -x_{n-k}$$

$$A_k = A_{n-k},$$

Zadanie 6. Załóżmy, że nieosobliwa macierz $A = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczna:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n$$

Załóżmy ponadto, że do rozwiązania układu równań liniowych $Ax = b$ można zastosować metodę eliminacji bez wyboru elementów głównych.

a) wykazać, że wówczas wielkości $a_{ij}^{(k)}$ otrzymywane w tej metodzie kolejno dla $k = 2, 3, ..., n$ są takie, że:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}, \qquad i, j = k, k+1, ..., n$$

b) wykaż jak można wykorzystać ten fakt dla zmniejszenia kosztu metody eliminacji.

Zadanie 7. Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spełnia warunki:

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^{n} |a_{ij}| \qquad j = 1, 2, ..., n$$

(A jest macierzą z przekątną dominującą kolumnowo) Pokaż, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A jest zbieżna.