

## Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

### Lista nr 3

Początek zapisów: **7 grudnia 2009 r.**

Termin realizacji: **14 stycznia 2010 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): **10 albo 12 punktów**

*Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez cztery osoby (cztery zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P3.19–P3.22, P3.32 i P3.33) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.*

**P3.1.** 10 punktów Wielomian  $I_n \in \Pi_n$  interpolujący funkcję  $f$  w węzłach

$$t_{n+1,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

można zapisać w postaci

$$I_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum'_{i=0} \left( \sum_{j=0}^n f(t_{n+1,j}) T_i(t_{n+1,j}) \right) T_i(x),$$

a wielomian  $J_n$  o własności  $J_n(u_{n-1,k}) = f(u_{n-1,k})$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), gdzie  $u_{n-1,k} = \cos(k\pi/n)$ , ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), można zapisać wzorem

$$J_n(x) = \frac{2}{n} \sum''_{j=0} \left( \sum_{k=0}^n f(u_{n-1,k}) T_k(u_{n-1,j}) \right) T_j(x).$$

Wielomian  $K_n \in \Pi_n$  podany wzorem

$$K_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum'_{j=0} \left( \sum_{k=0}^{n+1} f(u_{nk}) T_k(u_{nj}) \right) T_j(x)$$

jest  $n$ -tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji  $f$  na zbiorze  $\{u_{n0}, u_{n1}, \dots, u_{n,n+1}\}$ , gdzie  $u_{nk} = \cos(k\pi/(n+1))$  ( $k = 0, 1, \dots, n+1$ ). Dla wybranych funkcji  $f$  i wartości  $n$  obliczyć (w przybliżeniu) błędy aproksymacji jednostajnej funkcji  $f$  za pomocą  $I_n$ ,  $J_n$  i  $K_n$ , w przedziale  $[-1, 1]$ .

*Uwaga.* Symbol  $\sum'$  oznacza sumę, której pierwszy składnik należy podzielić przez 2, a  $\sum''$  – sumę, której pierwszy i ostatni składnik należy podzielić przez 2.

**P3.2.** 10 punktów Przybliżoną wartość pochodnej funkcji  $f$  w punkcie  $x$  podaje wyrażenie

$$\varphi(h) := \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)],$$

gdzie  $h > 0$ . Jeśli  $f$  jest dostatecznie regularna, wówczas można skonstruować trójkątną tablicę przybliżeń pochodnej według wzorów

$$\begin{aligned} D_{m0} &:= \varphi(h_0/2^m) & (m = 0, 1, \dots) \\ D_{mk} &:= (1 + \lambda_k)D_{m,k-1} - \lambda_k D_{m-1,k-1} & (k = 1, 2, \dots; m = k, k+1, \dots), \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda_k := 1/(4^k - 1)$ ,  $h_0$  jest ustalone (np.  $h_0 = 1$ ).

Dla danych  $f$ ,  $x$  i  $\varepsilon$  skonstruować  $M + 1$  początkowych wierszy tablicy  $\{D_{mk}\}$ , gdzie  $M$  jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$|D_{MM} - D_{M-1, M-1}| < \varepsilon |D_{MM}|.$$

Zapewnić możliwość drukowania pełnej tablicy błędów  $\{|f'(x) - D_{mk}|/|f'(x)|\}$ . Sprawdzić działanie programu **między innymi** dla  $f(x) = \ln x$  i  $x = 3$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$  i  $x = \arcsin 0.8$  oraz  $f(x) = \sin(x^2 + \frac{1}{3}x)$  i  $x = 0$ .

- P3.3.** 10 punktów Zrealizować algorytm, który dla danej funkcji  $f$  ciągłej w przedziale  $[a, b]$ , liczby naturalnej  $n$  oraz układu  $n + 2$  punktów  $D_n := \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\} \subset [a, b]$  wyznacza  $n$ -ty wielomian optymalny  $w_n^*$  w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji  $f$  na zbiorze  $D_n$ . Wykonać obliczenia dla wybranych funkcji  $f$  i wartości  $n$  w wypadku, gdy

$$(i) x_k = a + k \frac{b-a}{n+1}; \quad (ii) x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Naszkicować wykres funkcji  $e_n := f - w_n^*$  w przedziale  $[a, b]$ .

- P3.4.** 10 punktów Zrealizować następujący algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu  $s_n := \sum_{k=0}^n w_k P_k$ , gdzie współczynniki  $w_0, w_1, \dots, w_n$  są dane, a  $\{P_k\}$  jest ciągiem wielomianów, spełniającym związek rekurencyjny postaci

$$P_0(x) = a_0, \quad P_1(x) = (a_1x - b_1)P_0(x), \\ P_k(x) = (a_kx - b_k)P_{k-1}(x) - c_k P_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \dots),$$

przy czym  $a_k, b_k, c_k$  są danymi stałymi.

Obliczamy pomocnicze wielkości  $B_0, B_1, \dots, B_{n+2}$  według wzorów

$$B_k = w_k + (a_{k+1}x - b_{k+1})B_{k+1} - c_{k+2}B_{k+2} \quad (k = n, n-1, \dots, 0),$$

gdzie  $B_{n+1} = 0, B_{n+2} = 0$ . Wówczas jest  $s_n(x) = a_0 B_0$ .

Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla wielomianów  $I_n$  i  $J_n$ , podanych w zadaniu **P3.1** w postaci kombinacji wielomianów Czebyszewa  $T_k$ , oraz ich pochodnych  $I'_n$  i  $J'_n$ . *Wskazówka:* Zauważyć, że  $T'_k = kU_{k-1}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), gdzie  $U_k$  są wielomianami Czebyszewa II rodzaju, spełniającymi związek rekurencyjny  $U_k(x) = 2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) z warunkami początkowymi  $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$ .

- P3.5.** 10 punktów Dla danego  $n$  i danych węzłów  $x_0, x_1, \dots, x_n$  wyznaczyć współczynniki kwadratury interpolacyjnej

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

stosując wzór

$$A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{\omega(x)}{x - x_k} dx, \quad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Rozważyć (a) węzły równoodległe, (b) węzły będące zerami  $(n + 1)$ -go wielomianu Czebyszewa, (c) punkty ekstremalne  $n$ -tego wielomianu Czebyszewa. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \quad f_2(x) = \frac{2\pi^2(1+x)}{(1-x)(3+x)} \sin \pi(1+x).$$

- P3.6.** 10 punktów Zadanie polega na realizacji metody Romberga obliczania całki  $I := \int_a^b f(x) dx$ . Dla danych  $a, b, f$  i  $\varepsilon > 0$  należy skonstruować  $K$  początkowych wierszy tablicy Romberga  $\{T_{mk}\}$ , gdzie  $K$  jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$|T_{K0} - T_{K-1,0}| < \varepsilon |T_{K0}|.$$

Zapewnić możliwość drukowania pełnej tablicy błędów  $\{|I - T_{mk}|/|I|\}$ . Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1 + x^4}, \quad f_3(x) = \frac{2}{2 + \sin(10\pi x)}.$$

(Uwaga: wynik dokładny  $I$  jest równy odpowiednio 1.582233, 0.866970 i 1.15470054; w pierwszym wypadku jest  $[a, b] = [-1, 1]$ , a w pozostałych  $[a, b] = [0, 1]$ ).

- P3.7.** 10 punktów Należy zrealizować podany niżej adaptacyjno-rekurencyjny wariant metody Romberga obliczania całki

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Niech  $\{T_{ij}^{[a,b]}\}$ , gdzie  $0 \leq i, j \leq m$ , a  $m$  jest ustalone, będzie fragmentem tablicy Romberga dla całki (1), w której teoretycznie najlepszym przybliżeniem jest  $T_{m0}^{[a,b]}$ . Niech  $\varepsilon > 0$  będzie zadaną dokładnością obliczeń. Oznaczmy przez  $A_\varepsilon^{[a,b]}$  wynik obliczany za pomocą opisywanego algorytmu. Idea algorytmu jest następująca:

*Krok 1.* Obliczamy wielkości  $I_1 := T_{m0}^{[a,b]}$  oraz  $I_2 := T_{m0}^{[a,s]} + T_{m0}^{[s,b]}$ , gdzie  $s := (a + b)/2$ .

*Krok 2.* Jeśli  $|I_1 - I_2| \leq \varepsilon$ , to wartość  $I_2$  akceptujemy jako dobre przybliżenie całki, przyjmujemy  $A_\varepsilon^{[a,b]} := I_2$  i kończymy obliczenia.

*Krok 3.* W przeciwnym razie obliczamy  $A_\varepsilon^{[a,b]} := A_\varepsilon^{[a,s]} + A_\varepsilon^{[s,b]}$ , gdzie wielkości  $A_\varepsilon^{[a,s]}$  i  $A_\varepsilon^{[s,b]}$  wyznaczamy postępując, jak poprzednio (rekurencyjnie). *Uwaga:* Należy pamiętać o tym, że przybliżenia  $T_{m0}^{[a,s]}$  i  $T_{m0}^{[s,b]}$  są już obliczone, jak również o rozsądnym ograniczeniu liczby wywołań rekurencyjnych.

Przeprowadzić eksperymenty m. in. dla całek  $\int_{-1}^1 \cos(1000x) dx$ ,  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/2$ ,  $\int_0^1 |x - \frac{1}{7}| dx$ ,  $\int_{-1}^1 (x - \frac{1}{7}) \sin(\frac{1}{x - \frac{1}{7}}) dx = 0.76331437094006142 \dots$ . Dla wybranych całek przedstawić wykresy zależności liczby wywołań funkcji podcałkowej od wartości  $\varepsilon$ . Na podstawie eksperymentów oszacować optymalną wartość  $m$  (ograniczyć się do zakresu  $2 \leq m \leq 10$ ).

- P3.8.** 10 punktów Zrealizować podany niżej adaptacyjno-rekurencyjny wariant kwadratury Gaussa-Legendre'a obliczania całki

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Niech  $Q_n^{[a,b]}$ , gdzie  $n$  jest ustalone, będzie  $(n + 1)$ -punktową kwadraturą Gaussa-Legendre'a dla całki (2). Niech  $\varepsilon > 0$  będzie zadaną dokładnością obliczeń. Oznaczmy przez  $A_\varepsilon^{[a,b]}$  wynik obliczany za pomocą opisywanego algorytmu. Idea algorytmu jest następująca:

*Krok 1.* Obliczamy wielkości  $I_1 := Q_n^{[a,b]}$  oraz  $I_2 := Q_n^{[a,s]} + Q_n^{[s,b]}$ , gdzie  $s := (a + b)/2$ .

*Krok 2.* Jeśli  $|I_1 - I_2| \leq \varepsilon$ , to wartość  $I_2$  akceptujemy jako dobre przybliżenie całki, przyjmujemy  $A_\varepsilon^{[a,b]} := I_2$  i kończymy obliczenia.

*Krok 3.* W przeciwnym razie obliczamy  $A_\varepsilon^{[a,b]} := A_\varepsilon^{[a,s]} + A_\varepsilon^{[s,b]}$ , gdzie wielkości  $A_\varepsilon^{[a,s]}$  i  $A_\varepsilon^{[s,b]}$  wyznaczamy postępując, jak poprzednio (rekurencyjnie). *Uwaga:* Należy pamiętać o tym, że przybliżenia  $Q_n^{[a,s]}$  i  $Q_n^{[s,b]}$  są już obliczone, jak również o rozsądnym ograniczeniu liczby wywołań rekurencyjnych.

Przeprowadzić eksperymenty m.in. dla przykładów podanych w zadaniu **P3.7**. Dla wybranych całek przedstawić wykresy zależności liczby wywołań funkcji podcałkowej od wartości  $\varepsilon$ . Na podstawie eksperymentów oszacować optymalną wartość  $n$  (ograniczyć się do zakresu  $1 \leq n \leq 33$ ). Tabelę węzłów i współczynników kwadratur Gaussa-Legendre'a (na odcinku  $[-1, 1]$ ) można znaleźć pod adresem <http://www.ii.uni.wroc.pl/~pk1/GL.dat>.

**P3.9.** 10 punktów Wyprowadź wzory na współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

- (a) z dwoma węzłami (*wzór trapezów*),
- (b) z trzema węzłami (*wzór Simpsona*),
- (c) z czterema węzłami itd.

Następnie wykorzystaj otrzymane wzory do skonstruowania odpowiednich kwadratur złożonych. Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całek typu

$$\int_a^b P(x)dx, \quad \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \quad \int_a^b R(\sin x, \cos x)dx,$$

gdzie  $P$  i  $Q$  są wielomianami, a  $R$  – funkcją wymierną dwu zmiennych. Wyciągnij wnioski.

**P3.10.** 12 punktów Wykorzystując poznane metody numerycznego obliczania całek oznaczonych, zaproponuj i zrealizuj algorytmy wyznaczania przybliżonej wartości całki podwójnej

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całki

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy dx}{x^2 + y^2 + 1} = 0.639510351870311001962693085427323679 \dots$$

Literatura: J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1*, WNT, 1988, str. 164–166. A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971, str. 139–140.

**P3.11.** 10 punktów Zrealizować algorytm konstrukcji takiego wielomianu  $w$  możliwie najniższego stopnia, który – dla danej liczby dodatniej  $\varepsilon$  – spełnia nierówność

$$\int_0^1 x[f(x) - w(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$ .

**P3.12.** 12 punktów Niech dana będzie funkcja  $f \in C[-1, 1]$  mająca zera w punktach  $-1$  i  $+1$ , tzn.  $f(-1) = f(+1) = 0$ . Zaproponuj i zrealizuj algorytm wyznaczania wielomianu  $w_n^* \in \tilde{\Pi}_n$  ( $n \geq 2$ ) spełniającego warunek

$$\|f - w_n^*\|_2 = \min_{w_n \in \tilde{\Pi}_n} \|f - w_n\|_2,$$

gdzie  $\tilde{\Pi}_n := \{w \in \Pi_n : w(-1) = w(+1) = 0\}$ , a  $\|g\|_2^2 := \int_{-1}^1 [g(x)]^2 dx$ . Przedstaw wnioski z eksperymentów numerycznych przeprowadzonych dla odpowiednio dobranych funkcji  $f$ .

- P3.13.** 12 punktów O funkcji  $f \in C[0, 1]$  wiadomo, że  $f(0) = a$ , a  $f(1) = b$ . Opracuj efektywny algorytm wyznaczania wielomianu  $w_n^* \in \widehat{\Pi}_n$  ( $n \geq 2$ ) spełniającego warunek

$$\|f - w_n^*\|_2 = \min_{w_n \in \widehat{\Pi}_n} \|f - w_n\|_2,$$

gdzie  $\widehat{\Pi}_n := \{w \in \Pi_n : w(0) = a, w(1) = b\}$ , a  $\|g\|_2^2 := \int_0^1 [g(x)]^2 dx$ . Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności zaproponowaną metodę.

- P3.14.** 10 punktów Obliczyć **przybliżoną wartość całki**  $\int_a^b f(x) dx$  przy założeniu, że znane są tylko wartości  $f$  w zadanych z góry punktach  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Zastosować co najmniej dwie różne metody! Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi(1 + x^2)}, \quad f_3(x) = \frac{2\pi^2(1 + x)}{(1 - x)(3 + x)} \sin \pi(1 + x).$$

- P3.15.** 10 punktów Zrealizować następującą metodę obliczenia przybliżonej wartości całki nieoznaczonej

$$I(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{dla } a \leq x \leq b$$

przy założeniu, że znane są tylko wartości funkcji  $f$  w zadanych z góry punktach  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ .

- (i) Wyznaczyć naturalną funkcję sklejaną III stopnia  $s$ , interpolującą  $f$  w punktach  $t_0, t_1, \dots, t_n$ .  
 (ii) Przyjmąc  $I(x) \approx \int_a^x s(t) dt$ .

Oceń dokładność metody na podstawie wykonanych obliczeń kontrolnych.

- P3.16.** 10 punktów Zrealizować następującą metodę obliczania przybliżonej wartości całki

$$(3) \quad I := \int_a^b f(x) dx.$$

Podzielić przedział całkowania na  $N$  podprzedziałów o równej długości, a następnie zastosować do obliczenia całki w każdym z podprzedziałów – po uprzedniej liniowej zamianie zmiennej całkowania – dwupunktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a

$$Q_1(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Przybliżenie całki (3) daje suma przybliżeń całek w podprzedziałach. Powtórzyć czynności dla  $N := 2N$  i porównać otrzymane wyniki. Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla całek podanych w zadaniu **P3.6**.

- P3.17.** 10 punktów Za pomocą wzorów

$$P_{m0} := \psi(h_0/2^m) \quad (m = 0, 1, \dots) \\ P_{mk} := (1 + \lambda_k)P_{m,k-1} - \lambda_k P_{m-1,k-1} \quad (k = 1, 2, \dots; m = k, k+1, \dots),$$

gdzie

$$\psi(h) := \frac{1}{h^2} [f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)], \quad \lambda_k := 1/(4^k - 1),$$

a  $h_0$  jest ustalone (np.  $h_0 = 1$ ), określamy następującą tablicę przybliżeń wartości drugiej pochodnej funkcji  $f$  w punkcie  $x$ :

$$\begin{array}{ccccccc} P_{00} & & & & & & \\ P_{10} & P_{11} & & & & & \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ P_{m0} & P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mm} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & & \ddots \end{array}$$

Dla danych  $f$ ,  $x$  i  $\varepsilon$  skonstruować  $N + 1$  początkowych wierszy tablicy  $\{P_{mk}\}$ , gdzie  $N$  jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność  $|P_{NN} - P_{N-1,N-1}| < \varepsilon|P_{NN}|$ . Sprawdzić działanie programu m. in. dla  $f(x) = \ln x$  i  $x = 3$  oraz  $f(x) = \sin(x^2 + \frac{1}{3}x)$  i  $x = 0$ .

**P3.18.** 12 punktów Rozważyć następujące sugestie co do sposobu obliczenia całek

$$I_c := \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad I_s := \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

- (a) Użyć złożonego wzoru trapezów z  $n + 1$  równoodległymi węzłami, „ignorując” osobliwość w  $x = 0$  (tj. przyjmując arbitralnie zerową wartość funkcji podcałkowej dla  $x = 0$ ). Wykonać obliczenia dla  $n = 100(100)1000$ .
- (b) Wybrać małe  $h > 0$ , użyć złożonego wzoru trapezów z  $n$  równoodległymi węzłami do obliczenia całki  $\int_h^1$  oraz (odpowiednio przekształconego) wzoru

$$\int_0^1 t^{-1/2} g(t) dt \approx \frac{4}{3}g(0) + \frac{2}{3}g(1)$$

do obliczenia całki  $\int_0^h$ . Wykonać obliczenia dla  $n = 100(100)1000$ .

- (c) Zamienić zmienną całkowania według wzoru  $x = t^2$ , a następnie użyć złożonego wzoru trapezów z  $n + 1$  równoodległymi węzłami. Wykonać obliczenia dla  $n = 20(20)200$ .
- (d) Użyć kwadratury Gaussa-Legendre’a do obliczenia całek otrzymanych w punkcie **3.18c**. Wykonać obliczenia dla  $n = 1(1)4$ .

Skomentować otrzymane wyniki. *Uwaga:*  $I_c = 1.809045218947\dots$ ,  $I_s = 0.620549071924\dots$

**P3.19.** Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Wielomiany Bernsteina  $n$ -tego stopnia definiujemy wzorem

$$B_{ni}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Korzystając z tożsamości

$$t^i = \binom{n}{i}^{-1} \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} B_{nj}(t), \quad B_{ni}(t) = \sum_{k=i}^n (-1)^{i+k} \binom{j}{i} \binom{n}{k} t^k$$

opracować algorytmy przekształcenia postaci potęgowej wielomianu  $p \in \Pi_n$ , tj.

$$(4) \quad p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$$

na postać Béziera tego wielomianu

$$(5) \quad p(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_{ni}(t),$$

jak również przekształcenia odwrotnego. Wartość wielomianu  $p$  dla danego argumentu  $t \in [0, 1]$  można w wypadku, gdy ma on postać (4), obliczać za pomocą schematu Hornera, natomiast jeśli ma on postać (5), można użyć następującego **algorytmu**:

Niech pomocnicze wielkości  $\beta_i^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $i = 0, 1, \dots, n - k$ ) będą określone wzorami

$$\begin{cases} \beta_i^{(0)} := \beta_i & (i = 0, 1, \dots, n), \\ \beta_i^{(k)} := (1 - t)\beta_i^{(k-1)} + t\beta_{i+1}^{(k-1)} & (k = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - k). \end{cases}$$

Wówczas  $p(t) = \beta_0^{(n)}$ .

Porównać te dwa algorytmy na przykładach pod względem efektywności oraz odporności na zaburzenia danych.

**P3.20.** Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Wielomiany Bernsteina  $n$ -tego stopnia definiujemy wzorem

$$B_{ni}(u) = \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Przesunięte wielomiany Czebyszewa  $T_k^*$  są prosto związane z wielomianami  $T_k$ :

$$T_k^*(t) := T_k(2t - 1) = \sum_{i=0}^k \binom{2k}{2i} t^{k-i} (t - 1)^i \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Wielomianom przesuniętym odpowiada wobec tego przedział  $[0, 1]$ .

Opracować algorytm przekształcenia wielomianu  $p \in \Pi_n$  podanego w postaci Béziera

$$(6) \quad p(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_{ni}(t)$$

na kombinację liniową przesuniętych wielomianów Czebyszewa:

$$(7) \quad p(t) = \sum_{i=0}^n c_i T_k^*(t).$$

Wartość wielomianu (7) dla danego argumentu  $t \in [0, 1]$  można obliczać za pomocą wariantu algorytmu Clenshawa, natomiast wielomianu (6) – za pomocą *algorytmu de Casteljau*:

Niech pomocnicze wielkości  $\beta_i^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $i = 0, 1, \dots, n - k$ ) będą określone wzorami

$$\begin{cases} \beta_i^{(0)} := \beta_i & (i = 0, 1, \dots, n), \\ \beta_i^{(k)} := (1 - t)\beta_i^{(k-1)} + t\beta_{i+1}^{(k-1)} & (k = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - k). \end{cases}$$

Wówczas  $p(t) = \beta_0^{(n)}$ .

Zbadać na na przykładach efektywność obu algorytmów oraz ich odporność na zaburzenia danych.

**P3.21.** Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Zrealizować następującą metodę obliczania przybliżonej wartości całki

$$(8) \quad I := \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Dla danego  $n$  parzystego funkcję  $f$  przybliżamy za pomocą wielomianu

$$J_n = \sum_{j=0}^n a_j T_j,$$

gdzie

$$a_j := \frac{\epsilon_j}{n} \sum_{k=0}^n f(u_{n-1,k}) T_k(u_{n-1,j}) \quad (j = 0, 1, \dots, n; \epsilon_j = 2, \text{ gdy } j < n, \epsilon_n = 1),$$

$$u_{n-1,k} = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

a następnie za przybliżenie całki (8) przyjmujemy liczbę

$$I_n := \int_{-1}^1 J_n(x) dx = 2(b_1 + b_3 + \dots + b_{n-1}),$$

gdzie

$$b_{2k-1} := \frac{a_{2k-2} - a_{2k}}{4k - 2} \quad (k = 1, 2, \dots, n/2).$$

W prostszej wersji zadania wartość  $n$  jest wybierana przez prowadzącego obliczenia. W wersji ambitniejszej wartość ta powinna być wyznaczona tak, by  $|I_n - I_{n-1}| < \varepsilon |I_n|$ , gdzie  $\varepsilon > 0$  jest dane. (Dla bezpieczeństwa warto podać ograniczenie z góry wartości  $n$ ). Przykładowe całki podano w zadaniu **P3.6**.

**P3.22.** Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów<sup>1</sup> Załóżmy, że dany jest obraz o rozdzielczości  $M_x$  na  $M_y$  punktów. Zadanie polega na przekształceniu go do obrazu o rozdzielczości  $N_x$  na  $N_y$  punktów. Ponieważ zmiana rozmiaru odbywać się ma w poziomie i w pionie niezależnie od siebie, więc – dla uproszczenia – opis algorytmu ogranicza się jedynie do obrazów o rozmiarze  $M$  na 1 punktów.

Obraz taki można traktować jako ciąg wartości kolorów w punktach  $t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_M = M$ . Zmiana rozmiaru polega na wyznaczeniu wartości koloru  $K(\cdot)$  w punktach

$$p_i = 1 + (i - 1) \frac{M - 1}{N - 1} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

gdzie  $N$  jest nowym rozmiarem obrazu. Można to zrobić na kilka sposobów:

(a) *metodą najbliższego sąsiedztwa*, wyznaczając wartości  $K(p_i)$  w sposób następujący:

$$K(p_i) := K(\text{round}(p_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

(b) skonstruować taką funkcję sklejaną  $S$  pierwszego stopnia, że  $S(t_i) = K(t_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots, M$ , a następnie przyjąć

$$K(p_i) := S(p_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

(c) skonstruować taką naturalną funkcję sklejaną  $Z$  trzeciego stopnia, że  $Z(t_i) = K(t_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots, M$ , a następnie przyjąć

$$K(p_i) := Z(p_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

przy czym wartości wykraczające poza przedział dopuszczalnych wartości dla koloru są zastępowane końcami tego przedziału (np. wartość -2 zostanie zastąpiona przez 0, a 256 przez 255; zakładamy przy tym, że *kolor* jest liczbą całkowitą z przedziału  $[0, 255]$ ).

W wypadku obrazów, których oba wymiary są większe od 1, zmieniamy rozdzielczość najpierw w pionie, a następnie w poziomie (albo najpierw w poziomie, a potem w pionie).

Należy

(i) przetestować trzy podane wyżej metody zmiany rozdzielczości obrazka,

<sup>1</sup> Realizacja zadania wymaga umiejętności przekształcania obrazu (bitmapy) o 256 odcieniach szarości na tablicę liczb, i odwrotnie.



- (ii) sprawdzić, czy istotne jest to, w którym kierunku obraz jest najpierw przeskalowywany; można np. generować „obraz różnicy” o kolorach  $|K^{(1)}(\cdot, \cdot) - K^{(2)}(\cdot, \cdot)|$ , gdzie  $K^{(1)}$  jest kolorem otrzymanym pierwszym sposobem, a  $K^{(2)}$  – drugim (warto rozważyć też sytuacje, w których jeden wymiar jest zwiększany, a drugi zmniejszany),
- (iii) porównać czasy działania trzech podanych wyżej algorytmów,
- (iv) (*nieobowiązkowe*) porównać (wizualnie) najlepszy z powyższych algorytmów z profesjonalnym programem obróbki obrazów,
- (v) (*nieobowiązkowe*) zastosować najlepszy z algorytmów do zmiany rozmiaru obrazów kolorowych (obraz kolorowy, to w istocie nałożone na siebie trzy obrazy jednobarwne); powtórzyć punkt (iv) dla kolorowych obrazków.

**P3.23.** 10 punktów Wyznaczyć rozkład danej macierzy  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  na iloczyn czynników trójkątnych. Korzystając z powyższego wyniku rozwiązać układ równań  $Ax = b$ . Wykonać obliczenia m.in. dla *macierzy Hilberta*  $A = [a_{ij}]$ , gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

i *macierzy Pei*

$$A := \begin{bmatrix} d & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & d \end{bmatrix}$$

(Zauważmy, że dla  $d \approx 1$  macierz Pei jest źle uwarunkowana!) Omówić wyniki, podając wartość  $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$ , gdzie  $\tilde{x}$  jest obliczonym rozwiązaniem.

Literatura: [1, §5.3, §5.5], [2, §4.2], [3, §6.4, §6.6], [4, §5, §6], [5, §9.1–§9.5], [6, §4.1–§4.6].

**P3.24.** 10 punktów Zaproponować algorytm rozwiązywania układu  $n$  równań liniowych  $Ax = b$  ( $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) przy założeniu, że elementy  $a_{ij}$  są równe zero, jeśli  $|i - j| > m$ , gdzie  $m$  jest ustaloną liczbą, znacznie mniejszą niż  $n$  (np. równą 1 lub 2). Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki.

Literatura: patrz zadanie **P3.23** oraz [1, §5.4.2], [2, §4.3, str. 171], [4, §6.4], [6, §4.1, str. 176].

**P3.25.** 10 punktów Zaproponować algorytm rozwiązywania układu  $n$  równań liniowych  $Ax = b$  ( $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) przy założeniu, że  $a_{1n} \neq 0$ ,  $a_{n1} \neq 0$ , a pozostałe elementy  $a_{ij}$  są równe zero, jeśli  $|i - j| > 1$ . Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając wartość  $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$ , gdzie  $\tilde{x}$  jest obliczonym rozwiązaniem.

Literatura: patrz zadanie **P3.24**.

**P3.26.** 10 punktów Korzystając z rozkładu danej macierzy  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  na iloczyn czynników trójkątnych, wyznaczyć macierz  $A^{-1}$ . Wykonać obliczenia dla macierzy Hilberta i dla macierzy Pei (zob. zadanie **P3.23**) stopnia  $n$ , przyjmując wartości  $n = 3, 6, 9, 12$  (lub zbliżone do nich) oraz różne wartości parametru  $d$  (dla  $d \approx 1$  macierz Pei jest źle uwarunkowana!). Dla kontroli obliczyć element o maksymalnej wartości bezwzględnej macierzy  $AB - I$ , gdzie  $B = fl(A^{-1})$ .

Literatura: patrz zadanie **P3.23** oraz [1, §5.3.6], [3, §6.7], [4, §6.5], [5, §9.9].

**P3.27.** 10 punktów Stosując metodę eliminacji z wyborem częściowym elementów głównych obliczyć wyznacznik macierzy  $A$ . Zauważyć, że dla uniknięcia nadmiaru lub niedomiaru warto informację o  $\det A$  podać w postaci:

$$\sigma, \quad \log |\det A|,$$

gdzie  $\sigma := \text{sgn } \det A$ . Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta (zob. zadanie **P3.23**) i omówić wyniki, przyjmując różne wartości parametrów  $n$  i  $d$  (w tym  $d \approx 1$ ).

Literatura: patrz zadanie **P3.23** oraz [3, §6.7], [4, §5, str. 170–171].



Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając dla każdego z wariantów wartość  $\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ , gdzie  $\tilde{\mathbf{x}}$  jest obliczonym rozwiązaniem.

Literatura: patrz zadanie **P3.23** oraz [2, §4.3], [4, §5.2].

**P3.33.** Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Zrealizować następujący algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}).$$

- (i) Stosując metodę eliminacji z wyborem częściowym elementów głównych wyznaczyć takie macierze trójkątne  $L$  (dolną, z jedynkami na przekątnej) i  $U$  (górną) oraz macierz permutacji  $P$ , że  $LU = PA$ .
- (ii) Rozwiązać układy trójkątne  $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$  i  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , otrzymując  $\mathbf{x}_0 := f(\mathbf{x})$ .
- (iii) Dla  $k = 0, 1, \dots, k_{\max}$  wykonać czynności:
  - i. Obliczyć wektor  $\mathbf{r}_k := \mathbf{b} - A\mathbf{x}_k$  z podwójną precyzją.
  - ii. Obliczyć rozwiązanie  $\mathbf{h}_k$  układu  $A\mathbf{h}_k = \mathbf{r}_k$ , wyznaczając kolejno rozwiązania układów trójkątnych  $L\mathbf{g}_k = P\mathbf{r}_k$ ,  $U\mathbf{h}_k = \mathbf{g}_k$ .
  - iii. Obliczyć  $\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \mathbf{h}_k$ .
  - iv. Jeśli wartość  $\|\mathbf{h}_k\|_\infty$  jest dostatecznie mała, przerwać obliczenia.
- (iv) Ostatni wyznaczony wyraz ciągu  $\{\mathbf{x}_k\}$  przyjąć za poprawione rozwiązanie układu.

Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla układów o macierzy Pei i Hilberta (zob. zadanie **P3.23**) przyjmując różne wartości parametrów  $n$  i  $d$ . Można założyć, że rozwiązaniem dokładnym jest wektor  $\mathbf{e} := [1, 1, \dots, 1]^T$  lub, inaczej mówiąc, że  $\mathbf{b} := A\mathbf{e}$ .

## Literatura

- [1] A. Björck, G. Dahlquist, *Metody numeryczne*, PWN, 1987.
- [2] D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.
- [3] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.
- [4] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1992.
- [5] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, WNT, 1971.
- [6] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.