

Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 2

Początek zapisów: **9 listopada 2009 r.**

Termin realizacji: **6 grudnia 2009 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): **8, 10, albo 12 punktów**

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez cztery osoby (cztery zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P2.7, P2.8 i P2.12) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P2.1. 10 punktów Dla naturalnego $n \geq 2$ rozważyć równanie

$$\frac{x + x^{-1}}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{n}.$$

Równanie to można zapisać w równoważnej postaci $p_n(x) = 0$, gdzie p_n jest pewnym wielomianem. Można wykazać, że ma ono dokładnie dwa pierwiastki dodatnie,

$$\alpha_n \in (0, 1), \quad \beta_n \in (1, 3).$$

Ponadto ciąg $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$ jest monotonicznie malejący, tj.

$$\beta_2 > \beta_3 > \dots > \beta_n > \beta_{n+1} > \dots$$

- (a) Metodą bisekcji wyznaczyć β_n ($n = 2, 3, \dots, 20$) z dokładnością 6 cyfr dziesiętnych. Użyć $[1, 3]$ jako przedziału początkowego dla β_2 oraz $[1, \beta_n]$ – dla β_{n+1} ($n \geq 2$). Dla każdego n zapisać liczbę wykonanych iteracji.
- (b) Stosując metodę Newtona do równania $p_n(x) = 0$ wyznaczyć β_n ($n = 2, 3, \dots, 20$) z dokładnością 6 cyfr dziesiętnych. Użyć 3 jako wartości początkowej dla β_2 oraz β_n – dla β_{n+1} ($n \geq 2$). Dla każdego n zapisać liczbę wykonanych iteracji.

P2.2. 8 punktów **Metoda Steffensena** jest następującą metodą iteracyjną rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k)/g(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

gdzie

$$g(x) := [f(x + f(x)) - f(x)]/f(x).$$

Przy pewnych założeniach jest ona zbieżna kwadratowo.

Zaprogramować powyższą metodę i wykonać obliczenia m.in. dla $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ (zera leżące w pobliżu 4.5 i 7.7) oraz $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ i $x_0 = 5$.

P2.3. 8 punktów Zrealizować następujący **wariant metody siecznych**. Niech f będzie daną funkcją i niech a i b będą takie, że $f(a)f(b) < 0$. Połóżmy $c := a$. W kolejnych krokach metody niech b oznacza *ostatnie przybliżenie* zera α funkcji f , a – *przedostatnie przybliżenie*, a c – *najbardziej aktualne przybliżenie* (tj. otrzymane najpóźniej) o własności

$$(1) \quad f(c)f(b) < 0.$$

W każdym kroku aktualizujemy wartości a, b, c zastępując je odpowiednio wartościami a', b', c' . Jeśli $f(a)f(b) < 0$, to obliczamy b' stosując jeden krok metody siecznych dla przybliżeń a i b (symbolicznie $b' := MS(a, b)$). Jeśli $f(a)f(b) > 0$, to sprawdzamy najpierw, czy punkt $MS(a, b)$

będzie leżał w przedziale o końcach b i c . Jeśli TAK, to kładziemy $b' := MS(a, b)$; w przeciwnym razie przyjmujemy $b' := (b + c)/2$. Wreszcie definiujemy $a' := b$, potem $c' := c$ albo $c' := a'$, aby zachodziła własność analogiczna do własności (1), a następnie powtarzamy wszystkie wyżej opisane czynności dla aktualnych wartości a , b i c . Proces kończymy wówczas, gdy $|b - a| < \epsilon$ i/lub gdy $|f(b)| < \delta$, gdzie ϵ i δ są zadanymi z góry małymi liczbami. Proszę pamiętać o ograniczeniu liczby iteracji, żeby wykluczyć bardzo długie obliczenia!

- P2.4.** 8 punktów Na podstawie (udokumentowanych) obliczeń dla wybranych równań nieliniowych postaci $f(x) = 0$ wyznaczyć w przybliżeniu (inaczej mówiąc – odgadnąć) rząd każdej z poniższych metod iteracyjnych:

$$(2) \quad x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{\sqrt{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}},$$

$$(3) \quad x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} \left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right]^2 \quad (\text{metoda Olvera}),$$

$$(4) \quad x_{k+1} := x_k - 1 / \left[\frac{f'(x_k)}{f(x_k)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} \right] \quad (\text{metoda Halleya}).$$

- P2.5.** 12 punktów Metodę Newtona można stosować także do znajdowania rozwiązań równania nieliniowego $f(z) = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Np. dla $f(z) := z^4 + 1$ i $z_0 := 0.5 + 0.5i$ otrzymujemy $z_{10} = 0.7071067812 + 0.7071067812i$ – czyli bardzo dobre przybliżenie liczby $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, będącej jednym z rozwiązań równania $z^4 + 1 = 0$.

Niech c_{n+1} oznacza kolor czarny. Niech $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ będą rozwiązaniami równania $z^n + 1 = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Przypiszmy każdemu z tych rozwiązań inny, ale różny od czarnego, kolor; powiedźmy odpowiednio $c_1, c_2, \dots, c_n$. Niech M będzie liczbą parzystą, a W_M następującym zbiorem punktów płaszczyzny zespolonej:

$$W_M := \left\{ -1 + 2\frac{k}{M} + \left(-1 + 2\frac{l}{M} \right) i : k, l = 0, 1, \dots, M \right\}.$$

Dla wybranych n i M (np. $n = 3, 4, 5, 6$; $M = 400, 800$), wykonaj rysunek, na którym każdy z punktów w zbioru W_M zostanie narysowany kolorem $c(w)$ ustalonym na podstawie poniższej procedury:

- (a) $z_0 := w$; $z_{k+1} := z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$; np. $N = 10, 20, 35$);
 (b) jeśli istnieje takie k , że z_N jest blisko liczby ζ_k (jak należy to rozumieć w wypadku liczb zespolonych?), to przyjmujemy $c(w) := c_k$, w przeciwnym razie $c(w) := c_{n+1}$.

Jaki charakter ma otrzymany w ten sposób obraz? Spróbuj przeanalizować zaobserwowane zjawisko i wyciągnąć wnioski. Następnie przeprowadź podobny eksperyment dla metody Halleya, która wyraża się wzorem

$$z_{k+1} := z_k - 1 / \left[\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right].$$

Czy metoda ta zachowuje się podobnie?

- P2.6.** 10 punktów Niech α będzie rozwiązaniem równania nieliniowego $f(x) = 0$. Załóżmy, że dysponujemy metodami iteracyjnymi postaci

$$x_{n+1} := F(x_n), \quad x_{n+1} := G(x_n),$$

gdzie F i G są funkcjami spełniającymi warunek $F(\alpha) = G(\alpha) = \alpha$ (np. w wypadku metody Newtona mamy $F(x) = x - f(x)/f'(x)$). Załóżmy, że metody te są rzędu p i q , odpowiednio. Można wykazać, że metody postaci

$$x_{n+1} := F(G(x_n)), \quad x_{n+1} := G(F(x_n))$$

są rzędu $p \cdot q$. Wykorzystaj powyższą obserwację do zaproponowania metod iteracyjnych wysokiego rzędu rozwiązywania równań nieliniowych. Przeprowadź odpowiednie eksperymenty numeryczne i wyciągnij wnioski.

- P2.7.** Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Ważnym z punktu widzenia zastosowań jest zadanie obliczania wszystkich pierwiastków wielomianu $p_n \in \Pi_n$ o współczynnikach rzeczywistych, czyli takich liczb zespolonych $z_1, z_2, \dots, z_n$ dla których zachodzi

$$p_n(z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n; a_n \neq 0).$$

Przybliżone wartości pierwiastków $z_1, z_2, \dots, z_n$ można wyznaczyć stosując np. *iteracyjną metodę Bairstowa*, której zwięzły opis został podany m.in. w [1, str. 107], [2, str. 112], [3, str. 384] i [4, str. 293]. Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności powyższą metodę.

Literatura

- [1] W. Cheney, D. Kincaid, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.
- [2] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.
- [3] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971.
- [4] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

- P2.8.** Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów W wielu zastosowaniach konieczne jest wyznaczenie wszystkich pierwiastków wielomianu $p_n \in \Pi_n$ o współczynnikach zespolonych, czyli takich liczb zespolonych $z_1, z_2, \dots, z_n$ dla których zachodzi

$$p_n(z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (a_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \dots, n; a_n \neq 0).$$

Przybliżone wartości pierwiastków $z_1, z_2, \dots, z_n$ można wyznaczyć stosując np. *iteracyjną metodę Laguerre'a*, której zwięzły opis został podany m.in. w [1, str. 112], [2, str. 108] i [3, str. 376] (patrz zadanie **P2.7**). Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności powyższą metodę.

- P2.9.** 10 punktów Następujące *warianty metody Newtona*:

$$(5) \quad x_{n+1} := x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)} \quad (n = 0, 1, \dots);$$

$$(6) \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}^*)} \quad (n = 0, 1, \dots);$$

$$(7) \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{2} \left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x_{n+1}^*)} \right) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

gdzie

$$x_{n+1}^* := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

są przy pewnych założeniach zbieżne sześciennie do pojedynczego zera α funkcji f . Porównać liczby iteracji oraz obliczeń wartości funkcji f potrzebnych do wyznaczenia dokładnych 20 cyfr

dziesiętnych α – przy użyciu metod (5)–(7) oraz klasycznej metody Newtona. W każdym wypadku wyznaczyć wartość **numerycznego wykładnika zbieżności metody** wg wzoru

$$p \approx \frac{\ln |(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln |(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)|} \quad (n - \text{dostatecznie duże}).$$

Sugerowane obliczenia przykładowe dla:

- (a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $\alpha = 1.3652300134144\dots$;
- (b) $f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$, $\alpha = 1.4044916482162\dots$;
- (c) $f(x) = \exp(x^2 + 7x - 30) - 1$, $\alpha = 3$.

P2.10. 10 punktów Zrealizować następującą **modyfikację metody Newtona**. Dla danego przybliżenia x_0 pierwiastka α równania $f(x) = 0$ ciąg przybliżeń $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wyznacza się według wzorów

$$(8) \quad \begin{cases} y_n := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n := x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}, \\ x_{n+1} := z_n - \frac{f'(y_n)}{2f'(y_n) - f'(x_n)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}. \end{cases}$$

Przy pewnych założeniach rząd zbieżności metody do pojedynczego pierwiastka α jest równy pięć. Porównać liczby iteracji oraz obliczeń wartości funkcji f potrzebnych do wyznaczenia dokładnych 30 cyfr dziesiętnych α – przy użyciu metody (8) oraz klasycznej metody Newtona. W każdym wypadku wyznaczyć wartość **numerycznego wykładnika zbieżności metody** wg wzoru

$$p \approx \frac{\ln |(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln |(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)|} \quad (n - \text{dostatecznie duże}).$$

Sugerowane obliczenia przykładowe dla:

- (a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $\alpha = 1.3652300134144\dots$;
- (b) $f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$, $\alpha = 1.4044916482162\dots$;
- (c) $f(x) = \exp(x^2 + 7x - 30) - 1$, $\alpha = 3$;
- (d) $f(x) = x^2 \sin^2 x + e^{x^2 \cos x \sin x} - 28$, $\alpha = 4.6221041635528\dots$.

P2.11. 8 punktów Niech $p_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$). Obliczyć błąd $e_{nr} := \max_{x \in D_r} |f(x) - p_n(x)|$, gdzie D_r jest zbiorem r (np. 100) punktów przedziału $[-1, 1]$, dla

- (a) węzłów równoodległych,
- (b) węzłów będących zerami $(n+1)$ -go wielomianu Czebyszewa,
- (c) losowo wybranych węzłów.

Przedstawić wnioski z obliczeń dla funkcji $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \arctg x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$.

P2.12. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Jak wiadomo, interpolacja wielomianowa znajduje zastosowanie także w grafice komputerowej. Z pewnych względów (jakich?) osoby zajmujące się tą tematyką preferują tzw. *postać Béziera wielomianu*, tzn. wielomian $w_n \in \Pi_n$ zapisują w postaci

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(x),$$

gdzie B_k^n jest k -tym wielomianem Bernsteina stopnia n ,

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N})$$

(patrz np. [1, §9], [2, §7.2.3], [3, §1]).

Niech dane będą liczby $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$ oraz funkcja f określona w punktach x_i ($i = 0, 1, \dots, n$). Niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolacyjnym dla powyższych danych zapisanym w postaci Newtona,

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x),$$

gdzie $b_k := f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ ($k = 0, 1, \dots, n$) oraz $p_0(x) := 1$, $p_k(x) := (x - x_{k-1})p_{k-1}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Opracuj **efektywny algorytm** zamiany postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego L_n na jego *postać Béziera*, tj. znajdowania takich współczynników c_k ($k = 0, 1, \dots, n$) dla których zachodzi

$$\sum_{k=0}^n c_k B_k^n(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x).$$

Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź zaproponowaną metodę pod względem jej dokładności, skuteczności i stabilności. Wyciągnij wnioski.

Literatura

- [1] J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes, R.L. Phillips, *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*, WNT, 2001.
- [2] M. Jankowski, *Elementy grafiki komputerowej*, WNT, 1990.
- [3] P. Kiciak, *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowania w grafice komputerowej*, WNT, 2005.

P2.13. 10 punktów Wielomian $L_n \in \Pi_n$, spełniający dla danych parami różnych liczb $t_0, t_1, \dots, t_n$ i liczb $y_0, y_1, \dots, y_n$ warunki $L_n(t_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), można zapisać w **postaci Lagrange'a**

$$(9) \quad L_n(t) = \sum_{i=0}^n \omega_i y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j),$$

gdzie

$$\omega_i := 1 \bigg/ \prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Na przykładach m.in. y_i określonych jako wartości funkcji $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$ porównać algorytmy obliczania wartości wielomianu L_n , stosujące

- (a) postać (9);
- (b) **postać barycentryczną** tego wielomianu:

$$L_n(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{t - t_i} y_i \bigg/ \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{t - t_i} & (t \notin \{t_0, t_1, \dots, t_n\}), \\ y_k & (t = t_k, 0 \leq k \leq n). \end{cases}$$

P2.14. 12 punktów Wielomian interpolacyjny Lagrange'a $L_n \in \Pi_n$, przyjmujący w węzłach $t_0, t_1, \dots, t_n \in [-1, 1]$ takie same wartości, co funkcja f , można wyrazić wzorem

$$(10) \quad L_n(t) = \sum_{i=0}^n f(t_i) \lambda_i(t), \quad \text{gdzie} \quad \lambda_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

Wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości wielomianu (10) określamy wzorem

$$K_n := \max_{-1 \leq t \leq 1} \sum_{i=0}^n |\lambda_i(t)|.$$

Obliczyć wartość K_n dla

- (a) węzłów równoodległych $t_i := \frac{2i}{n} - 1$ lub $t_i := \frac{2i+1}{n+1} - 1$ ($i = 0, 1, \dots, n$),
- (b) węzłów będących zerami $(n+1)$ -go wielomianu Czebyszewa,
- (c) losowo wybranych węzłów.

Przedstawić wnioski, w szczególności dotyczące związku wartości wskaźnika z dokładnością przybliżenia funkcji f za pomocą wielomianu L_n (wykresy funkcji błędu $e_n := f - L_n$ mile widziane); w roli funkcji testowych można m.in. wziąć $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \arctg x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$.

- P2.15.** 10 punktów Obliczyć **przybliżoną wartość pochodnej** $f'(x)$ dla dowolnego $x \in [a, b]$ przy założeniu, że znane są tylko wartości f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Wykonać obliczenia kontrolne dla kilku wartości n i m.in. dla funkcji $\sin$, $\ln$ i $\exp$.

- P2.16.** 8 punktów Skonstruować **naturalną funkcję sklejaną III stopnia** s , interpolującą daną funkcję f w $n+1$ parami różnych punktach przedziału $[a, b]$. Obliczyć błąd

$$E_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N równoodległych punktów przedziału $[a, b]$. Wykonać obliczenia dla kilku par wartości n i N oraz dla funkcji (a) $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$; (b) $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 4$; (c) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$, $x \in [-5, 5]$; (d) $f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4})$, $x \in [-\pi, \pi]$.

- P2.17.** 8 punktów Dla danej krzywej parametrycznej $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$) możemy skonstruować następującą **krzywą sklejaną interpolacyjną**. Dla wybranych: $n \in \mathbb{N}$ oraz $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ obliczamy $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, n$, a następnie konstruujemy naturalne funkcje sklejane interpolujące III stopnia $s_x(t)$, $s_y(t)$. Poszukiwana krzywa sklejana ma przedstawienie parametryczne $x = s_x(t)$, $y = s_y(t)$ ($a \leq t \leq b$). Wykonać obliczenia m.in. dla krzywej zwanej *serpentyką*: $x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} t$, $y = \sin 2t$ ($-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$).

- P2.18.** 10 punktów Dla danej liczby naturalnej n , danych węzłów $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) i danej funkcji f istnieje dokładnie jedna funkcja $\tilde{s} \in C^2[a, b]$, zwana **okresową funkcją sklejaną interpolacyjną III stopnia**, spełniająca następujące warunki:

1° w każdym z podprzedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) funkcja $\tilde{s}$ jest identyczna z pewnym wielomianem stopnia co najwyżej trzeciego;

2° $\tilde{s}(x_k) = f(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $f(x_n) = f(x_0)$);

3° $\tilde{s}^{(i)}(a+0) = \tilde{s}^{(i)}(b-0)$ ($i = 0, 1, 2$).

Skonstruować funkcję sklejaną $\tilde{s}$ dla kilku wartości n , równoodległych węzłów oraz m.in. dla funkcji $f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). W każdym wypadku obliczyć błąd

$$\mathcal{E}_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - \tilde{s}(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N równoodległych punktów przedziału $[a, b]$.

- P2.19.** 10 punktów Obliczyć **przybliżoną wartość całki** $\int_a^b f(x) dx$ przy założeniu, że znane są tylko wartości f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi(1 + x^2)}, \quad f_3(x) = \frac{2\pi^2(1+x)}{(1-x)(3+x)} \sin \pi(1+x).$$

P2.20. 10 punktów Niech będą dane: liczba naturalna n , węzły $t_1, t_2, \dots, t_n$ ($a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$) oraz funkcja f określona w przedziale $[a, b]$. Punkty

$$\tau_0 := t_1, \quad \tau_i := \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad \tau_n := t_n$$

nazywamy **przegubami**. Dowodzi się, że istnieje dokładnie jedna taka **interpolująca funkcja sklejana DRUGIEGO stopnia** $\sigma \in C^1[a, b]$, że 1° w każdym podprzedziale $[t_i, t_{i+1}]$ jest $\sigma \equiv q_i \in \Pi_2$ ($1 \leq i \leq n-1$) oraz że $2^\circ \sigma(\tau_k) = f(\tau_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Dla $x \in [t_i, t_{i+1}]$ ($1 \leq i \leq n-1$) funkcja σ wyraża się wzorem

$$\sigma(x) = f(\tau_i) + \frac{1}{2}(m_{i+1} + m_i)(x - \tau_i) + \frac{1}{2h_i}(m_{i+1} - m_i)(x - \tau_i)^2,$$

gdzie $h_i := t_{i+1} - t_i$, a wielkości $m_i := \sigma'(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) stanowią rozwiązanie układu równań

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_im_{i+1} = 8(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) \quad (1 \leq i \leq n).$$

(Przyjmujemy, że $h_0 := h_n := m_0 := m_{n+1} := 0$). Skonstruować funkcję sklejaną σ dla kilku wartości n oraz m.in. dla funkcji (a) $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$; (b) $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 4$; (c) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$, $x \in [-5, 5]$; (d) $f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4})$, $x \in [-\pi, \pi]$. W każdym wypadku obliczyć błąd

$$\Delta_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - \sigma(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N (np. 101) równoodległych (lub wybranych losowo) punktów przedziału $[a, b]$.

P2.21. 10 punktów Na papierze milimetrowym narysować (jednym pociągnięciem!) kontur ulubionego zwierzątka. Wybrać n (np. 10 lub 20) punktów na otrzymanej linii i ponumerować je:

$$(11) \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

Odtworzyć w przybliżeniu zadaną linię, stosując jeden lub oba z następujących pomysłów:

- podzielić ciąg (11) na takie podciągi, żeby każdy z nich zawierał punkty leżące na wykresie pewnej funkcji; uzyskać przybliżoną postać linii wzorcowej łącząc wykresy przybliżeń tych funkcji;
- potraktować linię jako krzywą parametryczną $[x(t), y(t)]$, gdzie t jest parametrem przebiegającym przedział $[1, n]$, tak więc $x_i = x(i)$, $y_i = y(i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$; zrekonstruować funkcje $x(t)$, $y(t)$ stosując interpolację.

(3.7, 6.4)	(3.2, 6.7)	(2.7, 6.5)	(2.1, 6.4)	(1.7, 6.0)	(1.1, 5.9)	(0.7, 5.7)	(0.4, 5.7)
(0.4, 5.4)	(0.5, 5.0)	(0.3, 4.6)	(0.6, 4.3)	(0.6, 4.0)	(0.7, 3.7)	(0.6, 3.2)	(0.8, 2.9)
(0.8, 2.6)	(0.6, 2.4)	(0.8, 2.3)	(0.9, 2.4)	(1.1, 2.2)	(1.4, 2.1)	(1.8, 2.0)	(1.7, 1.8)
(1.9, 1.4)	(2.2, 1.5)	(2.1, 1.8)	(2.7, 1.6)	(2.6, 1.4)	(3.3, 1.3)	(3.5, 0.9)	(3.7, 0.6)
(3.9, 0.8)	(4.2, 0.7)	(4.3, 0.4)	(4.5, 0.5)	(4.7, 0.7)	(5.0, 0.6)	(5.5, 0.8)	(5.9, 0.6)
(6.2, 0.4)	(6.4, 0.3)	(6.3, 0.7)	(6.5, 1.2)	(6.8, 1.7)	(7.2, 2.0)	(7.1, 2.2)	(7.2, 2.4)
(6.8, 2.8)	(6.7, 3.2)	(6.8, 3.6)	(6.4, 3.9)	(6.2, 4.2)	(6.9, 4.5)	(6.8, 5.1)	(6.6, 5.6)
(6.5, 6.0)	(6.1, 6.2)	(5.5, 6.1)	(5.0, 6.2)	(4.6, 6.2)	(4.1, 6.3)	(3.7, 6.0)	(3.4, 6.1)
(3.2, 6.5)	(3.7, 6.4)						

TABELA 1. Tajemnicza krzywa, zawarta w kwadracie $[0, 7.5] \times [0, 7.5]$

Rozważyć wariant zadania, w którym punkty (11) są podawane w pliku tekstowym. Sprawdzić działanie programu dla danych z tabeli 1.