Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M14[1]

18 stycznia 2010 r.

M14.1. 1 punkt Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj. taką, że

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A, jest zbieżna.

M14.2. 2 punkty Wykazać, że przy założeniach podanych w zadaniu **M14.1** również metoda Seidela jest zbieżna.

M14.3. 1 punkt Rozważmy układ równań liniowych

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dla wektora początkowego $\boldsymbol{x}^{(0)} = [0,\ 0,\ 0]^T$ wykonać trzy iteracje według metod: (a) Jacobiego, (b) Seidela.

M14.4. 1 punkt Wykazać, że metoda Jacobiego nie jest zbieżna w wypadku układu o następującej macierzy współczynników:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

M14.5. 1 punkt Czy metoda Seidela jest zbieżna dla macierzy A z zadania **M14.4**?

M14.6. 2 punkty Wyodrębniając w macierzy A dolny trójkąt L, przekątną D i górny trójkąt U, otrzymamy następujący rozkład tej macierzy:

$$A = L + D + U.$$

Niech macierz B_ω, związana z metodą nadrelaksacji, będzie określona wzorem

$$B_\omega := (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U],$$

gdzie ω jest parametrem. Wykazać, że promień spektralny macierzy B_ω spełnia nierówność

$$\varrho(B_\omega) \geqslant |\omega - 1|.$$

Stanisław Lewanowicz

[1]**Ostatnia w tym semestrze.**