http://www.ii.uni.wroc.pl/~sle/teaching/anc-M13.pdf

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M13

14 stycznia 2010 r.

M13.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $M^{(k)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ będzie macierzą postaci

$$(1) \qquad M^{(k)} := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{nk} & & & 1 \end{bmatrix},$$

która różni się od macierzy jednostkowej tylko elementami podprzekątniowymi k-tej kolumny. Dobrać tak stałe $m_{k+1,k}, \ldots, m_{nk}$, żeby dla danego wektora $\boldsymbol{a} = [a_1, \ldots, a_n]^T$ o nieznikającej składowej a_k zachodziła równość

$$M^{(k)}\boldsymbol{a} = [a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0]^T.$$

M13.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech macierz $L^{(k)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie dana wzorem (*zaznaczono tylko elementy niezerowe*)

$$(2) \qquad L^{(k)} := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykazać, że $L^{(k)} = [M^{(k)}]^{-1}$, gdzie $M^{(k)}$ jest macierzą podaną wzorem (1).

M13.3. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Sprawdzić, że iloczyn $L := L^{(1)}L^{(2)}\cdots L^{(n-1)}$ macierzy typu (2) jest następującą macierzą trójkątną dolną:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & & \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ -m_{n-1,1} & -m_{n-1,2} & -m_{n-1,3} & \cdots & 1 & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & -m_{n3} & \cdots & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

M13.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ istnieje taka macierz $M^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci (1), że elementy podprzekątniowe pierwszej kolumny macierzy $A^{(2)} := M^{(1)}A$ są równe zeru.

M13.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ istnieją takie macierze $M^{(1)}$ i $M^{(2)}$ postaci (1), że elementy podprzekątniowe pierwszej i drugiej kolumny macierzy $A^{(3)} := M^{(2)}M^{(1)}A$ są równe zeru.

M13.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że jeśli do rozwiązania układu równań $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ można użyć metody eliminacji bez wyboru elementów głównych, to jako wynik dodatkowy uzyskujemy rozkład $A = LU$, gdzie L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, a U – macierzą trójkątną górną.

M13.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będą dane

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} := \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{x}} := \begin{bmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć wektory reszt $\tilde{\boldsymbol{r}} := A\tilde{\boldsymbol{x}} - b$ oraz $\hat{\boldsymbol{r}} := A\hat{\boldsymbol{x}} - b$. Który z wektorów $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}$ jest lepszym przybliżeniem rozwiązania?

Następnie obliczyć wektory błędów $\tilde{\boldsymbol{e}} := \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$ i $\hat{\boldsymbol{e}} := \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$, gdzie $\boldsymbol{x} := [1, -1]^T$ jest rozwiązaniem dokładnym układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Wyciągnąć wnioski.

Stanisław Lewanowicz