

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M12

7 stycznia 2010 r.

- M12.1.** 1 punkt Niech dla $p \in \{1, 2, \infty\}$ symbol $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ oznacza normę macierzy indukowaną przez p -tą normę wektorową. Wykazać, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zachodzi nierówność

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p.$$

- M12.2.** 1 punkt Niech $\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wykazać, że

- (a) $\text{cond}(A) \geq 1$;
- (b) $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

- M12.3.** 2 punkty Niech $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie macierzą o elementach

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ b_{ij} &= -1 & (i < j), \\ b_{ij} &= 0 & (i > j). \end{aligned}$$

Sprawdzić, że $\det B \ll \text{cond}_\infty(B)$, gdzie $\text{cond}_\infty(B) := \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty$. Jaki stąd wniosek?

- M12.4.** 1 punkt Obliczyć wskaźniki $\text{cond}_1(A)$ i $\text{cond}_\infty(A)$, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Co da się powiedzieć o uwarunkowaniu układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jeśli $\varepsilon \leq 0.01$?

- M12.5.** 1 punkt Wykazać, że iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) tego samego stopnia jest macierzą trójkątną dolną (górną).
- M12.6.** 2 punkty Wykazać, że jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.
- M12.7.** 2 punkty Jak można wykorzystać znajomość rozkładu LU macierzy A do obliczenia A^{-1} ? Podać kompletny algorytm.

Stanisław Lewanowicz