

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M11

17 grudnia 2009 r.

M11.1. 1 punkt Znaleźć takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1 , żeby dla każdego wielomianu f stopnia ≤ 3 zachodziła równość $\int_0^1 (1+x^2)f(x) dx = A_0f(x_0) + A_1f(x_1)$.

M11.2. 1 punkt Dla jakich wartości stałych A, B, C równość

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-1/2} dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodzi dla dowolnego wielomianu f stopnia co najwyżej piątego?

M11.3. 1 punkt Wykazać, że współczynniki kwadratury Gaussa są dodatnie.

M11.4. 1 punkt Dostępne są tablice węzłów i współczynników kwadratury Gaussa-Legendre'a

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),$$

obliczonych z dużą dokładnością¹. Pokazać, że można je zastosować do obliczenia przybliżonej wartości całki $\int_a^b g(t) dt$ w dowolnym przedziale $[a, b]$.

M11.5. 1 punkt Korzystając z wyniku zadania **M11.4** dla wybranych wartości n obliczyć całki

$$(a) \int_{-1}^5 e^x dx; \quad (b) \int_{-4}^4 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

M11.6. 2 punkty Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a, b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \rightarrow \infty$ zbieżny do całki $\int_a^b p(x)f(x) dx$.

Stanisław Lewanowicz

¹Zob. np. <http://www.convertit.com/Go/ConvertIt/Reference/AMS55.ASP?Res=150&Page=916&Submit=Go> ($2 \leq n \leq 96$).