

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M10

10 grudnia 2009 r.

M10.1. 2 punkty Obliczamy całkę

$$(1) \quad I_p(f) := \int_a^b p(x)f(x) dx,$$

gdzie p jest ustaloną funkcją nieujemną w przedziale $[a, b]$ (*funkcją wagową*). Dany jest ciąg kwadratur

$$(2) \quad Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Wykazać, że jeśli $A_k^{(n)} \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, \dots$), to

zbieżność ciągu $\{Q_n(f)\}$ do całki $I_p(f)$ dla każdej funkcji f ciągłej na odcinku $[a, b]$

ma miejsce **wtedy i tylko wtedy**, gdy

dla dowolnego wielomianu w ciąg $\{Q_n(w)\}$ jest zbieżny do $I_p(w)$.

M10.2. 2 punkty Niech symbole I_p i Q_n mają znaczenie wprowadzone w (1) i (2). Następnie niech $R_n(f) := I_p(f) - Q_n(f)$. Gdy x przebiega przedział $[a, b]$, wówczas zmienna t określona wzorem $x = \alpha t + \beta$, gdzie $\alpha := (b - a)/(d - c)$, $\beta := (ad - bc)/(d - c)$, przebiega przedział $[c, d]$. Wprowadźmy funkcje h i q wzorami $h(t) := f(\alpha t + \beta)$, $q(t) := p(\alpha t + \beta)$. Udowodnić, że zachodzi równość

$$\int_c^d q(t)h(t) dt = Q_n^*(h) + R_n^*(h),$$

gdzie

$$Q_n^*(h) := \sum_{k=0}^n B_k^{(n)} h(t_k^{(n)}), \quad R_n^*(h) := \frac{1}{\alpha} R_n(f),$$
$$B_k^{(n)} := \frac{1}{\alpha} A_k^{(n)}, \quad t_k^{(n)} := \frac{1}{\alpha} (x_k^{(n)} - \beta) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Sprawdzić, że jeśli rząd $Q_n = r$, to również rząd $Q_n^* = r$.

M10.3. 1 punkt Obliczamy wartość całki oznaczonej funkcji f w przedziale (a, b) stosując kwadraturę Newtona-Cotesa

$$(3) \quad Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^n A_k f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Sprawdzić, że $A_k = A_{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

M10.4. 1 punkt Sprawdzić, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa (3) są takie, że $A_k/(b-a)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) są liczbami wymiernymi.

M10.5. 1 punkt Stosując złożony wzór Simpsona obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_1^{10} \ln x \, dx$ z błędem $\leq 10^{-4}$.

M10.6. 1 punkt Sprawdzić, że

$$S_n(f) = \frac{1}{3}[4T_n(f) - T_{n/2}(f)] \quad (n = 2, 4, \dots),$$

gdzie $S_n(f)$ jest złożonym wzorem Simpsona, a $T_n(f)$ – złożonym wzorem trapezów. Jaki jest związek tej obserwacji z metodą Romberga?

M10.7. 2 punkty Wykazać, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a, b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x) \, dx$.

Stanisław Lewanowicz