Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M9

3 grudnia 2009 r.

M9.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że spośród wszystkich wielomianów postaci $x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_{n+1}$ (z dowolnymi współczynnikami $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$) najmniejszą normę jednostajną w przedziale $[-1, 1]$, równą 2^{-n}, ma standardowy wielomian Czebyszewa $\bar{T}_{n+1} := 2^{-n}T_{n+1}$.

M9.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jakie ważne wnioski z wyniku zadania **M9.1** odnoszą się do interpolacji wielomianowej?

M9.3. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$, a w_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n. Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n+2$ punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a, b]$, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ i że

(i) $|f(x_k) - w_n(x_k)| = ||f - w_n||_\infty^{[a,\,b]} \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1)$,

(ii) $f(x_j) - w_n(x_j) = -[f(x_{j-1}) - w_n(x_{j-1})] \quad (j = 1, 2, \ldots, n+1)$,

to w_n jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f.

M9.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $[-1, 1]$ wzorem

$$f(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \ldots + a_{n+1}T_{n+1}(x),$$

gdzie $T_0, \ldots, T_{n+1}$ są wielomianami Czebyszewa, a $a_0, \ldots, a_{n+1}$ — danymi stałymi. Sprawdzić, że wielomian $w_n = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \ldots + a_nT_n(x)$ jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla f w przedziale $[-1, 1]$.

M9.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0, 1]$.

M9.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny na zbiorze $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ dla funkcji o wartościach

x	0	1	2	4	6
$f(x)$	1	9	23	93	259

M9.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dla $f \in C[a, b]$ istnieją wszystkie pochodne i niech $|f^{(k)}(x)| > 0$ dla $x \in [a, b]$ i dla $k = 1, 2, \ldots$. Wykazać, że dla $n = 0, 1, \ldots$ zachodzi wówczas nierówność

$$E_n(f) > E_{n+1}(f).$$

Stanisław Lewanowicz