Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M8

25 listopada 2009 r.

M8.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $\{\bar{P}_k\}$ będzie ciągiem standardowych wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a,\, b]$, z wagą $p(x)$. Wykazać, że zachodzi związek rekurencyjny

$$\begin{aligned} &\bar{P}_0(x) = 1, \quad \bar{P}_1(x) = x - c_1, \\ &\bar{P}_k(x) = (x - c_k)\bar{P}_{k-1}(x) - d_k\bar{P}_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_k &= \langle x\bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle / \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle \quad (k \geqslant 1), \\ d_k &= \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle / \langle \bar{P}_{k-2}, \bar{P}_{k-2}\rangle \quad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

M8.2. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w w przedziale $[a, b]$, z wagą $p(x)$. Wykazać, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ wszystkie zera wielomianu P_n są rzeczywiste, pojedyncze i leżą w przedziale otwartym (a, b).

M8.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli funkcje f i g są ortogonalne, to

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

(*twierdzenie Pitagorasa*).

M8.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Udowodnić, że wielomian $w_n^* \in \Pi_n$ jest n-tym wielomianem dla funkcji $f \in C_p[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wielomianu $w_n \in \Pi_n$ zachodzi równość

$$\langle f - w_n^*, w_n\rangle = 0.$$

M8.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów, określonych w następujący sposób rekurencyjny:

$$P_0(x) = \alpha_0, \qquad P_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1)P_0(x),$$
$$P_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k)P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

gdzie α_k, β_k, γ_k są danymi stałymi. Uzasadnić następujący ***uogólniony algorytm Clenshawa*** obliczania wartości wielomianu $s_n := a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_nP_n$ o danych współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Obliczamy pomocnicze wielkości B_k $(k = 0, 1, \ldots, n+2)$ według wzorów

$$B_k = a_k + (\alpha_{k+1}x - \beta_{k+1})B_{k+1} - \gamma_{k+2}B_{k+2} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0),$$

gdzie $B_{n+1} = 0$, $B_{n+2} = 0$. Wówczas jest $s_n(x) = \alpha_0 B_0$.

M8.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że wielomiany Czebyszewa T_k spełniają równości

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} T_k(x) T_l(x)\, dx = 0 \qquad (k \neq l;\ k, l = 0, 1, \ldots),$$
$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} \left[T_k(x)\right]^2\, dx = \begin{cases} \pi & (k = 0), \\ \pi/2 & (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Co one oznaczają?

M8.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\bar{T}_k(x)$ będą standardowymi wielomianami ortogonalnymi w przedziale $[-1, 1]$, z wagą $(1-x^2)^{-1/2}$. Znaleźć związek rekurencyjny spełniany przez te wielomiany.

M8.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jakim wzorem wyraża się n-ty wielomian optymalny dla funkcji f w sensie normy

$$||f||_2 := \sqrt{\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} f^2(x)\, dx}?$$

Stanisław Lewanowicz