

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M6

11 listopada 2009 r.

- M6.1.** 2 punkty Wykazać, że zachodzi wzór rekurencyjny

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

przy czym $f[x_j] = f(x_j)$.

- M6.2.** 2 punkty Udowodnić, że jeśli $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, to

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n g[x_0, x_1, \dots, x_k] h[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

- M6.3.** 1 punkt Obliczyć n -ty iloraz różnicowy funkcji $f(x) = xg(x)$.

- M6.4.** 1 punkt Funkcja f o wartościach

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	4	11	16	13	-4

jest prawdopodobnie wielomianem trzeciego stopnia. Jak można to sprawdzić?

- M6.5.** 2 punkty Wykazać, że n -ty ($n \geq 0$) wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$.

- M6.6.** 2 punkty Wykazać, że wielomian Czebyszewa T_n ($n \geq 1$) ma n zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

- M6.7.** 2 punkty Wyznaczyć wszystkie punkty ekstremalne n -tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$.

- M6.8.** 2 punkty Uzasadnić następujący algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x ($c_0, c_1, \dots, c_n$ są danymi stałymi). Określamy pomocniczo wielkości $B_0, B_1, \dots, B_{n+2}$ wzorami

$$\begin{aligned} B_{n+2} &:= B_{n+1} := 0; \\ B_k &:= 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \quad (k = n, n-1, \dots, 0). \end{aligned}$$

Wówczas $w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$.

Stanisław Lewanowicz