http://www.ii.uni.wroc.pl/~sle/teaching/anc-M5.pdf

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 5

29 października 2009 r.

WPROWADZENIE

Wielomian $L_n \equiv L_n^f$ stopnia $\leqslant n$, interpolujący funkcję f w parami różnych $n+1$ węzłach $x_0, \ldots, x_n$, jest określony jednoznacznie, np. wzorem

$$L_n^f(x) := \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x), \tag{1}$$

gdzie

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n). \tag{2}$$

M 5.1. 1 punkt Niech $\mathcal{L}$ będzie odwzorowaniem, przyporządkowującym funkcji f wielomian L_n^f:

$$\mathcal{L}f = L_n^f.$$

(a) Sprawdzić, że $\mathcal{L}$ jest odwzorowaniem liniowym.

(b) Sprawdzić, że dla każdego wielomianu $w \in \Pi_n$ jest $\mathcal{L}w = w$.

M 5.2. 1 punkt Wykazać, że wielomiany (2) spełniają tożsamość $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$.

M 5.3. 1 punkt Wykazać, że wielomiany (2) spełniają równości

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

M 5.4. 2 punkty Sprawdzić, że wzór (1) można zapisać w postaci

$$L_n^f(x) = p_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)},$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

M 5.5. 2 punkty Wykazać, że w wypadku równoodległych węzłów

$$x_k = x_0 + kh \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ h > 0)$$

wzór interpolacyjny Lagrange'a (1) przybiera postać

$$L_n^f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)(-1)^{n-k} \binom{n}{k} \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \left(\frac{x - x_0}{h} - j \right).$$

M 5.6. 2 punkty Uzasadnić następującą *postać barycentryczną* wielomianu (1):

$$L_n^f(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{t - x_i} f(x_i) \Big/ \sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{t - x_i} & (t \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}), \\ f(x_k) & (t = x_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n), \end{cases}$$

gdzie

$$\sigma_i := 1 \Big/ \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (x_i - x_j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

M 5.7. 2 punkty Uzasadnić następujący algorytm, zwany *uogólnionym schematem Hornera*, obliczania wartości wielomianu $w \in \Pi_n$, podanego w postaci

(3) $$w(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) :$$

Obliczamy wielkości pomocnicze $u_0,\ u_1, \ldots,\ u_n$ za pomocą wzorów

$$u_n := b_n;$$
$$u_k := u_{k+1}(x - x_k) + b_k \qquad (k = n-1, n-2, \ldots, 0).$$

Wówczas $w(x) = u_0$.

M 5.8. 2 punkty Sformułować metodę wyznaczenia współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *postaci potęgowej*

$$L_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

wielomianu interpolacyjnego (1), przy założeniu, że znane są współczynniki $b_0, \ldots, b_n$ jego postaci Newtona (3).

Stanisław Lewanowicz