http://www.ii.uni.wroc.pl/~sle/teaching/anc-M4.pdf

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 4

22 października 2009 r.

M 4.1. [2 punkty] Załóżmy, że metoda iteracyjna

$$x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

jest zbieżna do pierwiastka α równania $f(x) = 0$. Wykazać, że jeśli

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

to rząd metody jest równy p.

M 4.2. [2 punkty] *Uproszczoną* metodę Newtona

$$x_{n+1} := x_n - f(x_n)/f'(x_0) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

stosujemy do wyznaczenia pojedynczego zera funkcji f. Jaki jest rząd zbieżności tej metody?

M 4.3. [2 punkty] Niech α będzie podwójnym zerem funkcji f. Wykazać, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna liniowo.

M 4.4. [1 punkt] Odwrotność liczby c można obliczać bez wykonywania dzieleń, za pomocą wzoru

$$x_{n+1} := x_n(2 - c\,x_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Uzasadnić ten fakt. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

M 4.5. [2 punkty] Niech będzie $a = m\,2^c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, a m – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. Zaproponować efektywną metodę obliczania $\sqrt{a}$, otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

M 4.6. [1 punkt] r-krotne zero α funkcji $f(x)$ jest pojedynczym zerem funkcji $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$. Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji $g(x)$?

M 4.7. [2 punkty] Załóżmy, że $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \boldsymbol{R}$. Ponadto, niech α będzie pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Wykazać, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0.

M 4.8. [2 punkty] Porównać poznane metody rozwiązywania równań nieliniowych na przykładzie równania $\cos^2 2x = x^2$. Zero $\alpha \approx 0.5149332647$ należy wyznaczyć z błędem mniejszym niż 10^{-7}. Proponowane przybliżenia startowe: $x_0 = 0.75$ i (w wypadku metody siecznych) $x_1 = 0$. Mile widziane wykresy ilustrujące zależność $x_n - \alpha$ od n (dla każdej z metod).

Stanisław Lewanowicz