

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 2

9 października 2009 r.

- 2.1.** 2 punkty Niech będą dane: $t \in \mathbf{N}$ oraz $x = s m 2^c$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbf{Z}$ i $m \in [\frac{1}{2}, 1)$ o rozwinięciu

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k} 2^{-k},$$

w którym $e_{-k} \in \{0, 1\}$ ($k \geq 1$). Wykazać, że istnieją takie stałe $e_{-k}^* \in \{0, 1\}$ ($1 \leq k \leq t$; $e_{-1}^* = 1$) i $c_t \in \mathbf{Z}$, że liczbę $\text{rd}(x)$ można zapisać w postaci

$$\text{rd}(x) = s \sum_{k=1}^t e_{-k}^* 2^{-k} \cdot 2^{c_t}.$$

- 2.2.** 2 punkty Wykazać, że dla $x = s m 2^c \neq 0$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbf{Z}$ i $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, zachodzi nierówność

$$|\text{rd}(x) - x| \leq \frac{1}{2} 2^{-t} 2^c.$$

- 2.3.** 1 punkt Wykazać, że dla $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$\left| \frac{\text{rd}(x) - x}{x} \right| \leq 2^{-t}.$$

- 2.4.** 2 punkty Przedyskutować uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji f , podanej wzorem **(a)** $f(x) = 1/(x^2 + c)$, gdzie c jest stałą; **(b)** $f(x) = (1 - \cos x)/x$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

- 2.5.** 1 punkt Na przykładzie następującego algorytmu obliczenia wartości wielomianu $L(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ w punkcie x objaśnić pojęcie algorytmu numerycznie poprawnego:

$$\left. \begin{array}{l} w_3 := a_3; \\ p_k := w_{k+1} \times x, \\ w_k := p_k + a_k \\ L(x) := w_0 \end{array} \right\} \quad (k = 2, 1, 0);$$

Zakładamy, że a_0 , a_1 , a_2 , a_3 oraz x są liczbami zmiennopozycyjnymi.

2.6. 1 punkt Załóżmy, że a , b i c są liczbami maszynowymi.

(a) Wyjaśnić, czy następujący algorytm obliczania wartości wyrażenia $w := ca^2 - b^2c$ jest numerycznie poprawny:

$$\begin{aligned} p &:= a - b, \\ q &:= a + b, \\ r &:= p \times q, \\ w &:= c \times r. \end{aligned}$$

(b) Powtórzyć analizę w wypadku algorytmu

$$\begin{aligned} f &:= a \times a, \\ g &:= c \times f, \\ h &:= b \times b, \\ j &:= h \times c, \\ w &:= g - j. \end{aligned}$$

2.7. 2 punkty Rozważyć następujący algorytm obliczania wartości wyrażenia

$$w := x_1 x_2 \cdots x_n, \quad \text{gdzie } x_i \in X_{fl} \quad (i = 1, 2, \dots, n):$$

$$\begin{aligned} 1^o \quad p_1 &:= x_1; \\ 2^o \quad p_k &:= \text{fl}(x_k \times p_{k-1}) \quad (k = 2, 3, \dots, n); \\ 3^o \quad \text{fl}(w) &:= p_n. \end{aligned}$$

Czy jest to algorytm numerycznie poprawny? Podać oszacowanie błędu

$$\frac{|w - \text{fl}(w)|}{|w|}.$$

Stanisław Lewanowicz