Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 1[1]

1 października 2009 r.

1.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $B \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wykazać, że każda liczba $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbf{Z}$, a $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

1.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać rozkład liczb zbioru $\{x : x = s \cdot m_t \cdot 2^c\}$ w wypadku, gdy $s \in \{-1, 1\}$, $t = 3$ i $c \in \{-1, 0, 1\}$.

1.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości funkcji (***a***) $1/(\sqrt{x^2+1} + x)$; (***b***) $\cos^2 x - 1$.

1.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Pierwiastki równania kwadratowego

$$x^2 - 2px + q = 0, \quad p \neq 0,\ q \neq 0,\ p^2 - q > 0$$

wyrażają się wzorem

$$x_k = p + (-1)^{k+1}\sqrt{p^2 - q} \qquad (k = 1,\, 2).$$

Przyjmując, że $p = 2.5$ i $q = -0.1$ obliczyć pierwiastki w czterocyfrowej arytmetyce dziesiętnej. Porównać je z dokładnymi wynikami:

$$x_1 = 5.01992\ldots, \qquad x_2 = -0.0199206\ldots.$$

Jak można ulepszyć algorytm stosujący wzory na x_1 i x_2?

1.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczyć wartość $w(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$ w punkcie $x = 4.71$ używając trzycyfrowej arytmetyki dziesiętnej. Podać błąd względny wyniku, biorąc pod uwagę wartość dokładną $w(4.71) = -14.636489$.

Powtórzyć obliczenia dla równoważnego wyrażenia $w(x) = ((x-6)x+3)x - 0.149$. Porównać i skomentować wyniki.

1.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Układ równań liniowych

$$\begin{aligned} 31.69\,x + 14.31\,y &= \ 45.00, \\ 13.11\,x + 5.89\,y &= \ 19.00 \end{aligned}$$

ma rozwiązanie dokładne $x = 7.2$ i $y = -12.8$. Wyjaśnić, dlaczego wynik obliczeń w czterocyfrowej arytmetyce dziesiętnej, według wzoru

$$y = \begin{vmatrix} 31.69 & 45.00 \\ 13.11 & 19.00 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.89 \end{vmatrix}$$

znacznie różni się od dokładnego.

[1] Wersja z 5.10 (poprawiona wartość współczynnika q w zad. 1.4)

1.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Pole n-kąta foremnego ($n \geqslant 4$) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość P_n jest przybliżeniem liczby π – tym lepszym, im większe jest n. Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno P_4, P_8, $P_{16}, \ldots$:

$$s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;$$
$$s_k := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1}\, s_k \qquad (k = 3, 4, \ldots).$$

(a) Uzasadnić powyższy algorytm.

(b) Stosując wybraną arytmetykę t-cyfrową obliczyć P_{2^k} dla $k = 2, 3, \ldots, 2t$.

(c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

Stanisław Lewanowicz