

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista L12¹

23 grudnia 2009 r.

- L12.1.** 2 punkty Sprawdzić, że odwzorowanie $\|\cdot\|_p : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ ($p = 1, 2, \infty$), określone dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ wzorami

$$(a) \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|; \quad (b) \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}; \quad (c) \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|,$$

są normami wektorowymi.

- L12.2.** 2 punkty Wykazać, że

- (a) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty$;
(b) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty$;
(c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$.

- L12.3.** 1 punkt Wyznaczyć takie najmniejsze stałe ρ_p ($p = 1, 2, \infty$), że dla dowolnego wektora $\mathbf{x} \in X^n$ zachodzi nierówność

$$\|\mathbf{x} - \text{rd}(\mathbf{x})\|_p \leq \rho_p 2^{-t} \|\mathbf{x}\|_p.$$

Uwaga. X oznacza zbiór liczb rzeczywistych reprezentowalnych w arytmetyce fl.

- L12.4.** 1 punkt Wykazać, że norma macierzy, indukowana przez pewną normę wektorową, jest z nią zgodna.

- L12.5.** 1 punkt Wykazać, że wzór $\|A\|_E := \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ definiuje normę macierzy zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$.

- L12.6.** 1 punkt Obliczyć $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_E$, $\|A\|_\infty$ w wypadku, gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

- L12.7.** 1 punkt Przyjmujemy, że *zaokrągleniem macierzy* $A = [a_{ij}]$ jest macierz

$$\text{rd}(A) = [\text{rd}(a_{ij})] = [a_{ij}(1 + \delta_{ij})],$$

gdzie $|\delta_{ij}| \leq 2^{-t}$. Wyznaczyć takie najmniejsze stałe μ_p ($p = 1, \infty$), że dla dowolnej macierzy $A \in X^{n \times n}$ zachodzi nierówność

$$\|A - \text{rd}(A)\|_p \leq \mu_p 2^{-t} \|A\|_p.$$

Uwaga. X oznacza zbiór liczb rzeczywistych reprezentowalnych w arytmetyce fl.

Stanisław Lewanowicz

¹Usunięto usterkę w zadaniu L12.2(c).