

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista L11

17 grudnia 2009 r.

- L11.1.** 1 punkt Znaleźć takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1 , żeby dla każdego wielomianu f stopnia ≤ 3 zachodziła równość $\int_0^1 x f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

- L11.2.** 1 punkt Uzasadnić, że równość

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

zachodzi dla dowolnego wielomianu f stopnia ≤ 5 .

- L11.3.** 1 punkt Dla jakich wartości stałych A, B, C równość

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-1/2} dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodzi dla dowolnego wielomianu f stopnia co najwyżej piątego?

- L11.4.** 1 punkt Dostępne są tablice węzłów i współczynników kwadratury Gaussa-Legendre'a

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),$$

obliczonych z dużą dokładnością¹. Pokazać, że można je zastosować do obliczenia przybliżonej wartości całki $\int_a^b g(t) dt$ w dowolnym przedziale $[a, b]$.

- L11.5.** 1 punkt Korzystając z wyniku zadania **L11.4** dla wybranych wartości n obliczyć całki

$$(a) \int_{-3}^3 \frac{1}{1+x^2} dx; \quad (b) \int_0^{3\pi/2} \cos x dx.$$

- L11.6.** 2 punkty Pokazać, że równość

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-1/2} dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\cos \frac{2k+1}{n+1} \pi\right)$$

zachodzi dla dowolnego wielomianu f stopnia co najwyżej $2n+1$.

Stanisław Lewanowicz

¹Zob. np. <http://www.convertit.com/Go/ConvertIt/Reference/AMS55.ASP?Res=150&Page=916&Submit=Go> ($2 \leq n \leq 96$).