Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista L9

3 grudnia 2009 r.

L9.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że spośród wszystkich wielomianów postaci $x^{n+1} + a_1x^n + \ldots + a_{n+1}$ (z dowolnymi współczynnikami $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$) najmniejszą normę jednostajną w przedziale $[-1, 1]$, równą 2^{-n}, ma standardowy wielomian Czebyszewa $\bar{T}_{n+1} := 2^{-n}T_{n+1}$.

L9.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ W jaki sposób wynik zadania **L9.1** wiąże się ze sprawą odpowiedniego wyboru węzłów interpolacji wielomianowej?

L9.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnić, że wielomian $w(x) = 2010$ jest dziesiątym wielomianem optymalnym dla funkcji $f(x) = 2009T_{11}(x) + 2010$ w sensie normy jednostajnej w przedziale $[-1, 1]$. (T_{11} jest jedenastym wielomianem Czebyszewa.)

L9.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech f będzie funkcją podaną wzorem

$$f(x) = 1794T_1(x) + 1830T_2(x) + 1863T_3(x) \qquad (x \in [-1,\, 1]),$$

gdzie T_1, T_2, T_3 są wielomianami Czebyszewa. Wyznaczyć takie stałe rzeczywiste p, q i r, żeby wyrażenie $\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - (px^2 + qx + r)|$ przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

L9.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0, 1]$.

L9.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny na zbiorze $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ dla funkcji o wartościach

x	0	1	2	4	6
$f(x)$	1	9	23	93	259

Stanisław Lewanowicz