

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista L8

25 listopada 2009 r.

- L8.1.** 2 punkty Niech $\{\bar{P}_k\}$ będzie ciągiem standardowych wielomianów ortogonalnych w przedziale $[-b, b]$, z wagą $p(x)$, będącą funkcją parzystą. Wykazać, że zachodzi związek rekurencyjny

$$\begin{aligned}\bar{P}_0(x) &= 1, & \bar{P}_1(x) &= x, \\ \bar{P}_k(x) &= x\bar{P}_{k-1}(x) - d_k\bar{P}_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots),\end{aligned}$$

gdzie d_k ($k = 2, 3, \dots$) są liczbami dodatnimi.

- L8.2.** 1 punkt Stosując wynik zadania **L8.1** dla $[-b, b] = [-1, 1]$ i $p(x) = 1$, znaleźć $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$.

- L8.3.** 2 punkty Znaleźć pierwszy wielomian optymalny dla funkcji $\sin \pi x$ w sensie normy

$$\left(\int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

- L8.4.** 2 punkty Niech $\{\bar{P}_k\}$ będzie ciągiem wielomianów wprowadzonym w zadaniu **L8.1**. Pokazać, że wówczas wielomiany $\bar{P}_0, \bar{P}_2, \bar{P}_4, \dots$ są funkcjami parzystymi, a $\bar{P}_1, \bar{P}_3, \bar{P}_5, \dots$ – nieparzystymi.

- L8.5.** 2 punkty Niech $\{\bar{P}_k\}$ będzie ciągiem wielomianów wprowadzonym w zadaniu **L8.1**. Uzasadnić następujący **uogólniony algorytm Clenshawa** obliczania wartości wielomianu

$$s_n := a_0\bar{P}_0 + a_1\bar{P}_1 + \dots + a_n\bar{P}_n$$

o danych współczynnikach $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Obliczamy pomocnicze wielkości B_k ($k = 0, 1, \dots, n+2$) według wzorów

$$B_k = a_k + xB_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \quad (k = n, n-1, \dots, 0),$$

gdzie $B_{n+1} = 0, B_{n+2} = 0$.

Wówczas jest $s_n(x) = B_0$.

L8.6. 1 punkt Znaleźć związek rekurencyjny wiążący standardowe wielokrotności $\bar{T}_k$ wielomianów Czebyszewa T_k .

L8.7. 2 punkty Zastosować uogólniony algorytm Clenshawa do obliczania wartości wielomianu

$$s_n := \frac{1}{2}c_0\bar{T}_0 + c_1\bar{T}_1 + \dots + c_n\bar{T}_n,$$

gdzie $\{\bar{T}_k\}$ jest ciągiem standardowych wielomianów ortogonalnych Czebyszewa.

L8.8. 2 punkty Wykazać, że wielomiany Czebyszewa są ortogonalne w przedziale $[-1, 1]$, z wagą $(1 - x^2)^{-1/2}$.

Stanisław Lewanowicz