

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista L7

18 listopada 2009 r.

- L7.1.** 2 punkty Niech L_9 oznacza wielomian interpolujący funkcję $f(x) = \ln x$ w dziesięciu równoodległych punktach przedziału $[1, 2]$. Oszacować błąd

$$\max_{1 \leq x \leq 2} |f(x) - L_9(x)|.$$

- L7.2.** 2 punkty Niech L_n oznacza wielomian interpolujący funkcję $f(x) = e^x$ w zerach $(n+1)$ -szego wielomianu Czebyszewa. Jaka wartość n gwarantuje, że zachodzi nierówność

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-5}?$$

- L7.3.** 1 punkt Wyznaczyć naturalną funkcję sklejaną III stopnia, interpolującą funkcję $f(x) = x^6$ w punktach 0, 1 i 2.

- L7.4.** 2 punkty Czy można tak dobrać wartości a, b, c i d , żeby funkcja

$$s(x) = \begin{cases} x + 1 & (-2 \leq x \leq -1), \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & (-1 \leq x \leq +1), \\ x - 1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

była naturalną funkcją sklejaną III stopnia, o wartościach

$$s(-2) = -1, \quad s(-1) = s(1) = 0, \quad s(2) = 1?$$

- L7.5.** 1 punkt Wymienić *wszystkie* powody, dla których funkcja S , określona dla $x \in [-1, +1]$ wzorem

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + x - 1 & (-1 \leq x \leq 0), \\ x^3 - x - 1 & (0 \leq x \leq 1), \end{cases}$$

nie jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia.

L7.6. 2 punkty Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$). Momenty $M_k := s''(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) spełniają układ

$$(*) \quad \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; \quad M_0 = M_n = 0),$$

gdzie $d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$, $\lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1})$, $h_k := x_k - x_{k-1}$. Uzasadnić poniższy algorytm rozwiązywania układu (*).

Obliczamy pomocnicze wielkości $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$, $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ w następujący sposób rekurencyjny:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &:= u_0 := 0, \\ p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k, \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= u_{n-1}, \\ M_k &= u_k + q_k M_{k+1} \quad (k = n-2, n-3, \dots, 1). \end{aligned}$$

Jaki jest koszt realizacji algorytmu?

L7.7. 2 punkty Wykazać, że $\int_a^b [s''(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) M_k$.

Stanisław Lewanowicz