

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista L 5

29 października 2009 r.

WPROWADZENIE

Wielomian $L_n \equiv L_n^f$ stopnia $\leq n$, interpolujący funkcję f w parami różnych $n + 1$ węzłach $x_0, \dots, x_n$, jest określony jednoznacznie, np. za pomocą wzoru

$$(1) \quad L_n^f(x) := \sum_{k=0}^n f(x_k) \lambda_k(x),$$

gdzie

$$(2) \quad \lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

L 5.1. 1 punkt Niech $\mathcal{L}$ oznacza odwzorowanie, przyporządkowujące funkcji f wielomian L_n^f :

$$\mathcal{L}f = L_n^f.$$

- (a) Sprawdzić, że $\mathcal{L}$ jest odwzorowaniem liniowym.
- (b) Sprawdzić, że dla każdego wielomianu $w \in \Pi_n$ jest $\mathcal{L}w = w$.

L 5.2. 1 punkt Wykazać, że wielomiany (2) spełniają tożsamość $\sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1$.

L 5.3. 1 punkt Wykazać, że wielomiany (2) spełniają równości

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

L 5.4. 1 punkt Wyznaczyć wielomian interpolacyjny dla następujących danych:

x	1	2	2.5	3	4
$f(x)$	-1	-1/3	3/32	4/3	25

L 5.5. 2 punkty Niech będzie $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$.

- (a) Wyznaczyć wielomian czwartego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-2, -1, 0, 1, 2$.
- (b) Wyznaczyć wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1, 0, 1$.

L 5.6. 2 punkty Sprawdzić, że wzór (1) można zapisać w postaci

$$L_n^f(x) = p_{n+1}(x) \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)},$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

L 5.7. 2 punkty Wykazać, że w wypadku równoodległych węzłów

$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 0, 1, \dots, n; h > 0)$$

wzór interpolacyjny Lagrange'a (1) przybiera postać

$$L_n^f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n f(x_k) (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \prod_{j=0, j \neq k}^n \left(\frac{x - x_0}{h} - j \right).$$

L 5.8. 2 punkty Uzasadnić następujący algorytm, zwany *uogólnionym schematem Hornera*, obliczania wartości wielomianu $w \in \Pi_n$, podanego w postaci

$$(3) \quad w(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) :$$

Obliczamy wielkości pomocnicze $u_0, u_1, \dots, u_n$ za pomocą wzorów

$$u_n := b_n;$$

$$u_k := u_{k+1}(x - x_k) + b_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0).$$

Wówczas $w(x) = u_0$.

Stanisław Lewanowicz