

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista L 3

15 października 2009 r.

- L 3.1.** 1 punkt Załóżmy, że liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ leżą w przedziale $[-2^{-t}, 2^{-t}]$. Uzasadnić, że zachodzi równość

$$(1) \quad \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i) = 1 + \sigma_n,$$

gdzie $\sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + O(2^{-2t})$.

- L 3.2.** 2 punkty Załóżmy, że liczba naturalna n spełnia nierówność $n < 2 \cdot 2^t$. Udowodnić, że wówczas wielkość σ_n z równości (1) spełnia oszacowanie $|\sigma_n| \leq \omega_n$, gdzie ω_n definiujemy wzorem

$$(2) \quad \omega_n := \frac{n2^{-t}}{1 - \frac{1}{2}n2^{-t}}.$$

- L 3.3.** 2 punkty Udowodnić, że przy założeniu $n < (0.1) \cdot 2^t$ wielkość (2) spełnia nierówność

$$\omega_n \leq n \left(1.06 \cdot 2^{-t} \right).$$

Stąd wywnioskować, że wielkość σ_n z równości (1) spełnia przybliżoną nierówność

$$\sigma_n \lesssim n2^{-t}.$$

- L 3.4.** 1 punkt Niech $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$ będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$. Niech ponadto będzie $m_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ oraz $e_n := \alpha - m_n$.

(a) Wykazać, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ($n \geq 0$).

(b) Ile wynosi stosunek długości przedziałów $[a_n, b_n]$ i $[a_0, b_0]$ ($n \geq 1$)?

(c) Wykazać, że

$$(3) \quad |e_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad (n \geq 0).$$

- L 3.5.** 1 punkt Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero α z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba $\varepsilon > 0$?
- L 3.6.** 1 punkt Funkcja $f(x) = x e^{-x} - 0.06064$ ma zero $\alpha = 0.0646926359947960 \dots$. Dla $0 \leq n \leq 15$ porównać rzeczywiste wartości błędów e_n z ich oszacowaniami (3) (oznaczenia – jak w zadaniu **L 3.4**). Czy wielkości $|e_n|$ maleją monotonicznie wraz ze wzrostem n ?
- L 3.7.** 2 punkty Wyznaczyć wszystkie zera funkcji $f(x) = x^2 + 10 \cos x$ z błędem nie większym niż 10^{-4} . *Wskazówka:* Naszkicować wykresy funkcji $g(x) = x^2$ i $h(x) = -10 \cos x$.
- L 3.8.** 1 punkt Z dokładnością 4 cyfr dziesiętnych wyznaczyć punkt przecięcia krzywych $y = 3x$ i $y = e^x$.

Stanisław Lewanowicz