

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista L 1

1 października 2009 r.

L 1.1. 2 punkty Wykazać, że każda liczba $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = sm2^c$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbf{Z}$, a $m \in [\frac{1}{2}, 1)$.

L 1.2. 1 punkt Podać wszystkie liczby zmiennopozycyjne postaci

$$x = \pm 0.1e_{-2}e_{-3} \cdot 2^{\pm c},$$

gdzie $c, e_k \in \{0, 1\}$.

L 1.3. 1 punkt Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości funkcji **(a)** $\sqrt{x^2 + 1} - x$; **(b)** $x^{-3}[\sin x - x]$.

L 1.4. 1 punkt Pierwiastki równania kwadratowego

$$x^2 - bx + c = 0, \quad b^2 - 4c > 0$$

wyrażają się wzorem

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Przyjmując, że $b = 3.6778$ i $c = 0.0020798$ obliczyć pierwiastki w pięciocyfrowej arytmetyce dziesiętnej, stosując algorytm

r	$:=$	$b \cdot b$	$=$	$0.13526 \cdot 10^2$
s	$:=$	$4c$	$=$	$0.83192 \cdot 10^{-2}$
u	$:=$	$r - s$	$=$	
v	$:=$	$\sqrt{u}$	$=$	
w	$:=$	$b + v$	$=$	
x_1	$:=$	$w/2$	$=$	
z	$:=$	$b - v$	$=$	
x_2	$:=$	$z/2$	$=$	

Oceń wyniki, porównując je z dokładnymi wartościami:

$$x_1 = 3.67723441190\dots, \quad x_2 = 0.00056558809\dots$$

Jak można ulepszyć powyższy algorytm?

- L 1.5.** 1 punkt Obliczyć wartość $w(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$ w punkcie $x = 4.71$ używając trzycyfrowej arytmetyki dziesiętnej. Podać błąd względny wyniku, biorąc pod uwagę wartość dokładną $w(4.71) = -14.636489$.

Powtórzyć obliczenia dla równoważnego wyrażenia $w(x) = ((x - 6)x + 3)x - 0.149$. Porównać i skomentować wyniki.

- L 1.6.** 2 punkty Układ równań liniowych

$$\begin{aligned} 31.69x + 14.31y &= 45.00, \\ 13.11x + 5.89y &= 19.00 \end{aligned}$$

ma rozwiązanie dokładne $x = 7.2$ i $y = -12.8$. Wyjaśnić, dlaczego wynik obliczeń w czterocyfrowej arytmetyce dziesiętnej, według wzoru

$$y = \left| \begin{array}{cc|c} 31.69 & 45.00 & \\ 13.11 & 19.00 & \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.89 \end{array} \right|$$

znacznie różni się od dokładnego.

- L 1.7.** 2 punkty Pole n -kąta foremnego ($n \geq 4$) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2}n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość P_n jest przybliżeniem liczby π – tym lepszym, im większe jest n . Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno $P_4, P_8, P_{16}, \dots$:

$$\begin{aligned} s_2 &:= 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2; \\ s_k &:= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1} s_k \quad (k = 3, 4, \dots). \end{aligned}$$

- (a) Uzasadnić powyższy algorytm.
- (b) Stosując wybraną arytmetykę t -cyfrową obliczyć P_{2^k} dla $k = 2, 3, \dots, 2t$.
- (c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

Stanisław Lewanowicz