

# Algorytmy i Struktury Danych

## Zadania z pierwszej części egzaminu; Odsłona I i II

1. Przedstaw ideę algorytmu Boruvki (Sollina).
2. Które z poniższych algorytmów mogą działać niepoprawnie dla grafów z ujemnymi wagami krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.
  - (a) algorytm Kruskala
  - (b) algorytm Prima
  - (c) algorytm Dijkstry

3. Rozważmy następujące kryterium zrównoważenia drzew:

$$l(w) < \alpha l(v)$$

dla każdego wierzchołka  $v$  i dla każdego jego syna  $w$ , gdzie  $l(v)$  oznacza liczbę liści w poddrzewie o korzeniu w  $v$  a  $\alpha$  jest pewną liczbą mniejszą od 1.

Czy ten warunek gwarantuje, że w drzewie nie powstaną długie ścieżki?

4. O ile co najwyżej może zwiększyć się liczba drzew w kopcu Fibonacciego wskutek wykonania pojedynczej operacji *decreasekey*?
5. Dla której z poniżej podanych struktur danych koszt (najgorszego przypadku) wykonania operacji *find(i)* sprawdzającej czy klucz  $i$  jest pamiętany w strukturze jest  $O(\log n)$ , gdzie  $n$  jest rozmiarem struktury?
  - (a) drzewo binarnych przeszukiwań,
  - (b) drzewo AVL,
  - (c) kopiec,
  - (d) kopiec dwumianowy,
  - (e) kopiec Fibonacciego,
  - (f) drzewo czerwono-czarne.

6. Rozwiąż równanie rekurencyjne

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n = 1 \\ 3 & \text{jeśli } n = 2 \\ T(n-2) + 2n - 1 & \text{jeśli } n > 2 \end{cases}$$

7. Który z poniższych algorytmów sortowania może w najgorszym przypadku wykonać  $\Omega(n^2)$  porównań:
  - (a) quicksort,
  - (b) mergesort (czyli sortowanie przez scalanie),
  - (c) insertsort (czyli sortowanie przez wstawianie)?

Przypomnienie:  $\Omega(n^2)$  oznacza - "nie mniej niż  $cn^2$  dla pewnej stałej  $c > 0$ ".

8. Złożoność algorytmu magicznych piątek wyraża się nierównością

$$T(n) \leq T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lceil 7n/10 \rceil) + O(n).$$

Wyjaśnij skąd się biorą składniki po prawej stronie nierówności. Uzasadnij dlaczego  $T(n)$  jest  $\Theta(n)$ .

9. Napisz procedurę partition (nie musi to być wersja z wykładu, ale musi być efektywna).
10. Narysuj drzewo binarnych wyszukiwań, pamiętające klucze 1, 2, 3, 4, 5, które
  - (a) jest drzewem AVL,
  - (b) nie jest drzewem AVL.

Uwaga: Oczywiście trzeba narysować dwa różne drzewa.

11. Przedstaw strategię zachłanną algorytmu aproksymacyjnego dla problemu Set Cover o współczynniku aproksymacji  $H_n$ .
12. Ile operacji *join* wykona się podczas łączenia kopców dwumianowych (wersja eager) zawierających odpowiednio 53 i 35 elementów.  
Przypomnienie: operacja *join* łączy dwa drzewa dwumianowe tego samego rzędu.
13. Podaj definicję uniwersalnej rodziny funkcji haszujących.
14. Ile różnych drzewców można utworzyć dla  $n$ -elementowego zbioru kluczy  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , którego pewnym dwóm elementom omyłkowo przypisano takie same priorytety (a pozostałym kluczom przypisano różne priorytety)?
15. Na czym polega operacja kaskadowego odcinania w kopcach Fibonacciego?
16. Ile drzew może zawierać  $n$ -elementowy kopiec dwumianowy (w wersji lazy) po wykonaniu operacji deletemin? Odpowiedź koniecznie uzasadnij.
17. W algorytmie czterech Rosjan obliczane są iloczyny macierzy o rozmiarze  $n \times \log n$  i macierzy o rozmiarze  $\log n \times n$ . Ile takich iloczynów jest obliczanych? Odpowiedź koniecznie uzasadnij.
18. Opisz, w jaki sposób DFS może być zastosowane do znalezienia cyklu Eulera w grafie.
19. Ile funkcji haszujących musimy znaleźć konstruując słownik statyczny dla zbioru  $n$  kluczy (chodzi o konstrukcję opartą na haszowaniu dwupoziomowym). Odpowiedź koniecznie uzasadnij.
20. Narysuj sieć półczyszczącą o ośmiu wejściach.
21. Wylicz funkcję  $\pi$  dla wzorca *abrakadabra*.
22. Narysuj automat skończony rozpoznający dwa wzorce: *abaa* i *abab*.
23. Jaki byłby koszt wykonania ciągu  $\sigma$  złożonego  $O(n)$  operacji *UNION* i *FIND*, gdyby w operacji *UNION* zbiory były łączone w dowolny (niekoniecznie zrównoważony sposób), a operacja *FIND* nadal byłaby wykonywana z kompresją ścieżek? Odpowiedź koniecznie uzasadnij.
24. Opisz pokrótce ideę algorytmu Shift-Or.
25. W jaki sposób problem mnożenia macierzy może być wykorzystany do rozwiązania problemu najkrótszych ścieżek w grafie?
26. Opisz, w jaki sposób obliczenie wartości wielomianu  $n$ -tego stopnia w  $n$ -tych pierwiastkach z jednościami jest redukowane do obliczenia wartości dwóch wielomianów stopnia  $n/2$  w  $(n/2)$ -tych pierwiastkach z jednościami.
27. Opisz ideę algorytmu klasy NC dla problemu dodawania dwóch liczb  $n$ -bitowych.