

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

IIUWr. II rok informatyki.

1. Niech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ będzie zbiorem kluczy, (takim, że $\forall_{i=1, \dots, n-1} a_i < a_{i+1}$), które chcemy pamiętać w słowniku stałym. Znamy także ciąg p_1, \dots, p_n prawdopodobieństw zapytania o poszczególne klucze. Przyjmujemy, że $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, a więc do słownika nie będą kierowane zapytania o klucze spoza słownika. Chcemy zaimplementować słownik jako drzewo BST. Ułóż algorytm znajdujący takie drzewo, które minimalizuje oczekiwany czas wykonywania operacji na słowniku.

Punktacja:

- za algorytm działający w czasie $O(n^3)$ - 1pkt;
 - za algorytm działający w czasie $O(n^2)$ - 2pkt;
2. (1pkt) Uzasadnij stwierdzenie, że funkcje hashujące potrzebne w konstrukcji słownika stałego (podanej na wykładzie) mogą być efektywnie znalezione.
3. (1pkt) Rodzinę H funkcji hashujących ze zbioru kluczy U w zbiór indeksów $\{0, \dots, m-1\}$ nazywamy *uniwersalną* (lub inaczej *2-uniwersalną*), jeśli

$$\forall_{x \neq y \in U} Pr_{h \in H}[h(x) = h(y)] \leq \frac{1}{m}.$$

Rozważmy następującą rodzinę funkcji haszujących. Niech uniwersum $U = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ i niech $V = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ będzie zbiorem wartości funkcji, gdzie $m \leq n$. Niech ponadto $p > n$ będzie liczbą pierwszą. Funkcje $h_{a,b}$ definiujemy w następujący sposób:

$$h_{a,b}(x) = ((ax + b) \bmod p) \bmod m.$$

Udowodnij, że rodzina

$$H = \{h_{a,b} \mid 1 \leq a \leq p-1, 0 \leq b \leq p-1\}$$

jest 2-uniwersalna.

4. (2pkt) Udowodnij, że po umieszczeniu n kluczy w n -elementowej tablicy haszującej (z nawlekaniami kluczy o tej samej wartości funkcji haszującej na listy) z dużym prawdopodobieństwem żadna lista nie będzie zawierać więcej niż $\log n / \log \log n$ kluczy, o ile do haszowania użyta zostanie losowa funkcja haszująca h .
5. (2pkt) Przeprowadź analizę zamortyzowanego kosztu ciągu operacji *insert*, *deletemin*, *decrease-key*, *meld*, *findmin* wykonywanych na kopcach Fibonacciego, w których kaskadowe wykonanie operacji *cut* wykonywane jest dopiero wtedy, gdy wierzchołek traci trzeciego syna.