

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

IIUWr. II rok informatyki.

1. (1pkt) Pokaż, że problem znajdowania otoczki wypukłej nie może być rozwiązany w modelu drzew decyzyjnych.
2. (2pkt) Problem "Przekrój zbiorów" zdefiniowany jest następująco:

PROBLEM:

Dane: Liczby rzeczywiste $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.*Wynik:* 'TAK' - jeśli $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$
'NIE' - w przeciwnym przypadku.

Udowodnij, że $\Omega(n \log n)$ jest dolną granicą na rozwiązanie tego problemu w modelu liniowych drzew decyzyjnych.

3. (2pkt) Udowodnij, że $2n - 1$ porównań trzeba wykonać, aby scalić dwa ciągi n elementowe w modelu drzew decyzyjnych. Zastosuj grę z adwersarzem, w której adwersarz na początku ogranicza przestrzeń danych tak, by zawierała $2n$ zestawów danych takich, by każde porównanie wykonane przez algorytm eliminowało co najwyżej jeden zestaw.
4. (2pkt) Rozważmy problem wyznaczenia za pomocą porównań elementów największego i drugiego z kolei w zbiorze n -elementowym. Udowodnij, że $n + \lceil \log n \rceil - 2$ porównań potrzeba i wystarcza do wyznaczenia tych elementów.
5. (1pkt) W uproszczonej wersji gry *Mastermind* każdy gracz wybiera ciąg k różnych liczb spośród $\{1, \dots, n\}$, a następnie pytaniami próbuje zgadnąć ciąg wybrany przez drugiego gracza. Pytania mają formę ciągów k -elementowych. W odpowiedzi na pytanie podawana jest następująca informacja o liczbie trafionych elementów ciągu:
Niech $a_1, \dots, a_k$ będzie ciągiem wybranym przez przeciwnika a $b_1, \dots, b_k$ - pytaniem. Odpowiedzią jest para (x, y) , gdzie $x = |\{i : b_i = a_i\}|$ a $y = |\{i : b_i = a_j \text{ dla pewnego } j \neq i\}|$.
Do zadania ilu pytań potrafisz zmusić przeciwnika zgadującego wybrany przez Ciebie ciąg?
6. (2pkt) Przeprowadź analizę oczekiwanej liczby porównań wykonywanych przez algorytm *Quicksort*. Załóż, że
 - wszystkie elementy sortowanego ciągu są różne,
 - dla każdego n , wszystkie permutacje n -elementowe (określające uporządkowane danych) są jednakowo prawdopodobne.

Użyj metody zaprezentowanej na wykładzie, polegającej na obliczeniu wartości oczekiwanej zmiennej losowej $X = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{ij}$, gdzie X_{ij} jest równa 1, jeśli i -ty i j -ty (co do wielkości) element ciągu danych były porównywane przez algorytm.

Czy tak obliczona wartość odpowiada liczbie wykonanych przez algorytm porównań? Jeśli nie, dokonaj jak najmniej bolesnych korekt w algorytmie lub analizie.

ZADANIA DODATKOWE

1. (2pkt) *Algebraiczne Drzewo Obliczeń* jest uogólnieniem algebraicznego drzewa decyzyjnego. Posiada ono dwa rodzaje wierzchołków:

- wierzchołki obliczeniowe: z każdym takim wierzchołkiem u związana jest wartość f_u , która jest określona jako wynik jednej z poniższych operacji:

$$f_u \leftarrow f_w + f_v, \quad f_u \leftarrow f_w - f_v, \quad f_u \leftarrow f_w * f_v, \quad f_u \leftarrow f_w / f_v, \quad f_u \leftarrow \sqrt{f_v},$$

gdzie f_w i f_v są wartościami skojarzonymi z pewnymi przodkami wierzchołka u lub są elementami ciągu wejściowego lub stałymi z R .

- wierzchołki rozgałęziające: wierzchołek v wykonuje test $f_u < 0$ bądź $f_u \geq 0$ bądź $f_u = 0$, gdzie u jest przodkiem v .

Problem Set Equality (SE) zdefiniowany jest następująco: dane są zbiory $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ oraz $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$; pytamy, czy $X = Y$. Pokaż, że jeśli dane dla problemu SE są liczbami całkowitymi, to problem ten może być rozwiązany w modelu Algebraicznych Drzew Obliczeń w czasie liniowym.

ZADANIA DODATKOWE - NIE BĘDĄ ROZWIĄZYWANE W CZASIE ĆWICZEŃ

1. (0pkt) Pokaż, że $\Omega(n \log n)$ pozostaje dolną granicą dla problemu sortowania, jeśli w modelu drzew decyzyjnych na zapytania o relację między elementami a i b możliwe są trzy odpowiedzi: " $a < b$ ", " $a = b$ " i " $a > b$ ".
2. (1pkt) Pokaż, że problem "Element uniqueness" rozkłada się na $\Omega(n!)$ spójnych składowych.
3. (2pkt) Rozważmy następujący problem weryfikacji rozmiaru wielozbioru (MSV). Dany jest wielozbiór złożony z n liczb rzeczywistych oraz liczba naturalna k . Należy sprawdzić, czy w tym wielozbiorze jest dokładnie k różnych elementów. Postaraj się wskazać jak najwięcej różnych spójnych składowych, na które problem ten rozkłada się.
4. (1pkt) Rozważmy decyzyjną wersję problemu otoczki wypukłej: mamy dane n punktów $p_1, \dots, p_n$ na płaszczyźnie oraz liczbę naturalną k . Pytamy, czy otoczka wypukła tego zbioru składa się z k punktów. Wiedząc, że problem MSV zdefiniowany w poprzednim zadaniu wymaga $\Omega(n \log k)$ operacji w modelu algebraicznych drzew decyzyjnych, pokaż, że w tym modelu decyzyjna wersja problemu otoczki także wymaga tylu działań.

Krzysztof Loryś